



1. (12 Punkte)

- (a) Wir nennen eine Menge M *nummerierbar*, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M gibt. Sie heißt *aufzählbar*, wenn eine injektive Abbildung von M nach $\mathbb{N}$ existiert.

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Begriff der Abzählbarkeit eine äquivalente Charakterisierung dieser *beiden* Begriffe ist. D.h., zeigen Sie, dass abzählbare Mengen auch nummerierbar und aufzählbar sind, und dass nummerierbare bzw. aufzählbare Mengen auch abzählbar sind.

- (b) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

2. (8 Punkte)

Es sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass die Menge $\{f : A \rightarrow \mathbb{N}\}$ aller Funktionen von A nach $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

3. (10 Punkte)

Wir beweisen nun: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist nicht abzählbar. Wo liegt der Fehler?

Jede natürliche Zahl u lässt sich eindeutig darstellen in der Form

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \cdot 2^i \quad \text{mit } u_i \in \{0, 1\}.$$

Also können wir u mit der unendlichen Bitfolge $(u_0, u_1, u_2, \dots)$ identifizieren. Dies erweitern wir für die Menge der Paare natürlicher Zahlen, und stellen (u, v) durch die verschränkte Bitfolge $(u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)$ dar.

Wir nehmen nun an, dass eine Aufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert. Diese ist eine Aufzählung solcher Bitfolgen. Wendet man darauf das in der Vorlesung vorgestellte Cantorsche Diagonalisierungsverfahren an, so erhält man ein Paar, das in der Aufzählung nicht vorkommt. Damit haben wir einen Widerspruch erzeugt und folgern, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nicht aufzählbar ist.

Hinweis: Denken Sie Ihr Argument wirklich bis zum Ende durch. Bei dieser Aufgabe ist man leicht versucht, zu früh aufzuhören.

4. (Zusatzaufgabe; 5 Punkte)

Man kann folgendermaßen beweisen, dass die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ nicht abzählbar ist:

Wir nehmen das Gegenteil an und betrachten eine Aufzählung der Elemente in $[0, 1]$. Das i -te Element dieser Aufzählung umgeben wir mit einem Intervall $I_i \subset [0, 1]$ der Länge 10^{-i} , $i = 1, 2, 3, \dots$. Die Vereinigung $\bigcup_{i \geq 1} I_i$ ergibt eine vollständige Überdeckung des Intervalls $[0, 1]$. Betrachtet man jedoch die Summe der Intervalllängen $\sum_{i \geq 1} |I_i|$, so erhält man einen Wert kleiner als 1. (Warum?) Damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet.

Wir übertragen diesen Beweis nun wörtlich auf die rationalen Zahlen in $[0, 1]$. Warum ist das falsch?