

Theoretische Informatik - Übungsblatt 4

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259

Di, 9-11 Uhr, Andreas Augustin

Aufgabe 1

(a)

$$L_a = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w) \text{ und } aa \text{ ist kein Teilwort von } w\}$$

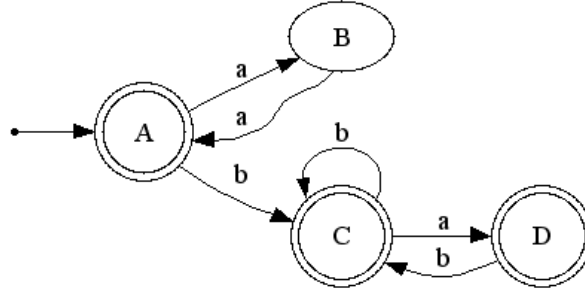


Abbildung 1: Automat zu Aufgabe 1a

Die Sprache ist regulär.

Regulärer Ausdruck:

$$b^*(ab)^*(bb^*a)^*b^*$$

(b)

$$L_b = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w) \text{ und } aaa \text{ ist kein Teilwort von } w\}$$

Idee:

Die Sprache ist nicht regulär, da man für jede Permutation z.B. von dem Wort *abbbbbaa* (*a, bbbaba, abbbbaab, abbabab, ...*) neue Zustände bräuchte. Anders ausgedrückt: die Menge der Fortsetzungssprachen ist nicht endlich.

Beweis durch Myhill-Nerode:

L_b ist keine DEA-Sprache $\Leftrightarrow \mathcal{F}_{L_b} = \{C_{L_b}(w) \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist nicht endlich.

Angenommen, es gibt einen DEA $M = (\Sigma, Q, s, F, \Delta)$ mit $L_b(M) = L_b$. Dann muss gelten:

$$w \in \{a, b\}^* : C_{L_b}(w) = \bigcup \{L_{b_{q'}} \mid q' \in \delta_q(w)\}$$

Die Zustandsmenge Q ist jedoch nicht endlich, da man für jede Anordnung (Permutation) der a 's und b 's im Wort neue Zustände bräuchte (vgl. Idee).

Da die Zustandsmenge Q nicht endlich ist, ist die Anzahl der verschiedenen $\delta_q(w)$ nicht endlich.

$$\Rightarrow \{C_{L_b}(w) \mid w \in \{a, b\}^*\} \text{ ist nicht endlich}$$

Somit ist nach Myhill-Nerode die Sprache L_b nicht regulär.

(c)

$$L_c = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ gerade}\}$$

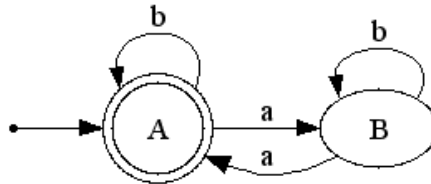


Abbildung 2: Automat zu Aufgabe 1c

Die Sprache ist regulär.

Regulärer Ausdruck:

$$(b^*ab^*a)^*b^*$$

Aufgabe 2

nach Regel 1:

$$\{0, 3\} \in U$$

$$\{1, 3\} \in U$$

$$\{2, 3\} \in U$$

$$\{4, 3\} \in U$$

$$\{6, 3\} \in U$$

$$\{7, 3\} \in U$$

$$\{0, 5\} \in U$$

$$\{1, 5\} \in U$$

$$\{2, 5\} \in U$$

$$\{4, 5\} \in U$$

$$\{6, 5\} \in U$$

$$\{7, 5\} \in U$$

nach Regel 2:

$$\{0, 1\} \xrightarrow{b} \{3, 5\} \Rightarrow \{0, 1\} \in U$$

$$\{0, 2\} \xrightarrow{b} \{3, 5\} \Rightarrow \{0, 2\} \in U$$

$$\{0, 4\} \xrightarrow{b} \{0, 5\} \Rightarrow \{0, 4\} \in U$$

$$\{0, 6\} \xrightarrow{b} \{5, 7\} \Rightarrow \{0, 6\} \in U$$

$$\{0, 7\} \xrightarrow{b} \{0, 5\} \Rightarrow \{0, 7\} \in U$$

$$\{1, 2\} \xrightarrow{a} \{2, 2\}, \{1, 2\} \xrightarrow{b} \{3, 3\} \Rightarrow \{1, 2\} \notin U$$

$$\{1, 4\} \xrightarrow{b} \{0, 3\} \Rightarrow \{1, 4\} \in U$$

$$\{1, 6\} \xrightarrow{a} \{2, 5\} \Rightarrow \{1, 6\} \in U$$

$$\{2, 4\} \xrightarrow{a} \{1, 2\} \Rightarrow \{2, 4\} \in U$$

$$\{2, 6\} \xrightarrow{a} \{2, 5\} \Rightarrow \{2, 6\} \in U$$

$$\{2, 7\} \xrightarrow{b} \{0, 3\} \Rightarrow \{2, 7\} \in U$$

$$\{3, 5\} \xrightarrow{a} \{3, 4\} \Rightarrow \{3, 5\} \in U$$

$$\{4, 6\} \xrightarrow{b} \{1, 5\} \Rightarrow \{4, 6\} \in U$$

$$\{4, 7\} \xrightarrow{a} \{1, 2\}, \{4, 7\} \xrightarrow{b} \{0, 0\} \Rightarrow \{4, 7\} \notin U$$

$$\{6, 7\} \xrightarrow{b} \{0, 7\} \Rightarrow \{6, 7\} \in U$$

	7	6	5	4	3	2	1
0	X	X	X	X	X	X	X
1	X	X	X	X	X		
2	X	X	X	X	X		
3	X	X	X	X			
4		X	X				
5	X	X					
6	X						

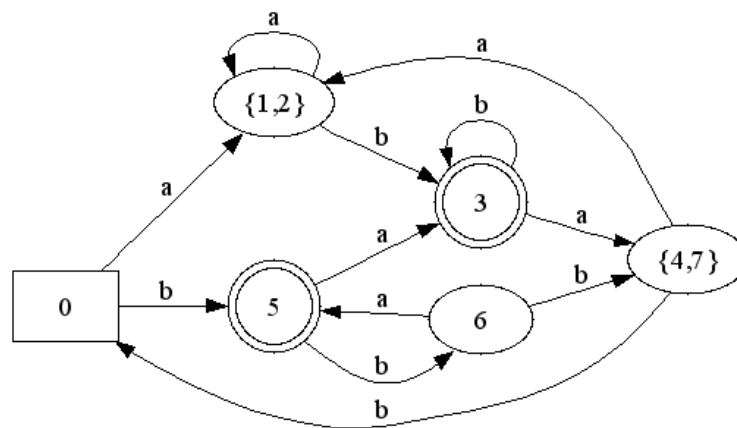


Abbildung 3: Automat zu Aufgabe 2

Aufgabe 3

GKB-Sprachen sind äquivalent zu regulären Sprachen, da man das Übergangsdiagramm eines Automaten als gerichteten Graphen mit Kantenbeschriftung auffassen kann.

Aufgabe 4

Gegeben:

DEA M mit Σ Eingabealphabet und n Zuständen. Es soll gelten:

$$L(M) = \Sigma^* \Leftrightarrow M \text{ akzeptiert alle Worte über } \Sigma \text{ der Länge höchstens } n$$

Zu zeigen:

L ist DEA-Sprache.

Beweis durch Myhill-Nerode:

$M = (\Sigma, Q, s, F, \Delta)$. Zeige, dass $\mathcal{F}_L$ endlich.

$$w \in \Sigma^* : C_L(w) = \bigcup \{L_{q'} \mid q' \in \delta_q(w)\}$$

Die Zustandsmenge Q ist endlich (da M n Zuständen hat) $\Rightarrow \#$ der verschiedenen $\delta_q(w)$'s ist endlich.

$$\Rightarrow \{C_L(w) \mid w \in \Sigma^*\} \text{ endlich}$$