

Theoretische Informatik - Übungsblatt 2

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259

Di, 9-11 Uhr, Andreas Augustin

Aufgabe 1

Zeige: $\bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.

Beweis:

Sei $A_i := \{a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{ik_i}\}$, $k_i \in \mathbb{N}$ fest, $i \in \mathbb{N}$ beliebig.

Definiere weiterhin

$$B_i := \{a_{im} \mid m \in \mathbb{N}\} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Dann gilt:

Jede Menge $B_i, i \in \mathbb{N}$, ist wegen $m \in \mathbb{N}$ abzählbar, und die Menge aller B_i ist wegen $i \in \mathbb{N}$ ebenfalls abzählbar. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ebenfalls abzählbar.

$$\Rightarrow \bigcup \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ ist abzählbar} \quad (*)$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} & A_i \subset B_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow & \bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\} \\ \stackrel{(*)}{\Rightarrow} & \bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ ist abzählbar.} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Der Automat geht in den nächsten Zustand über, wenn er ein a liest.

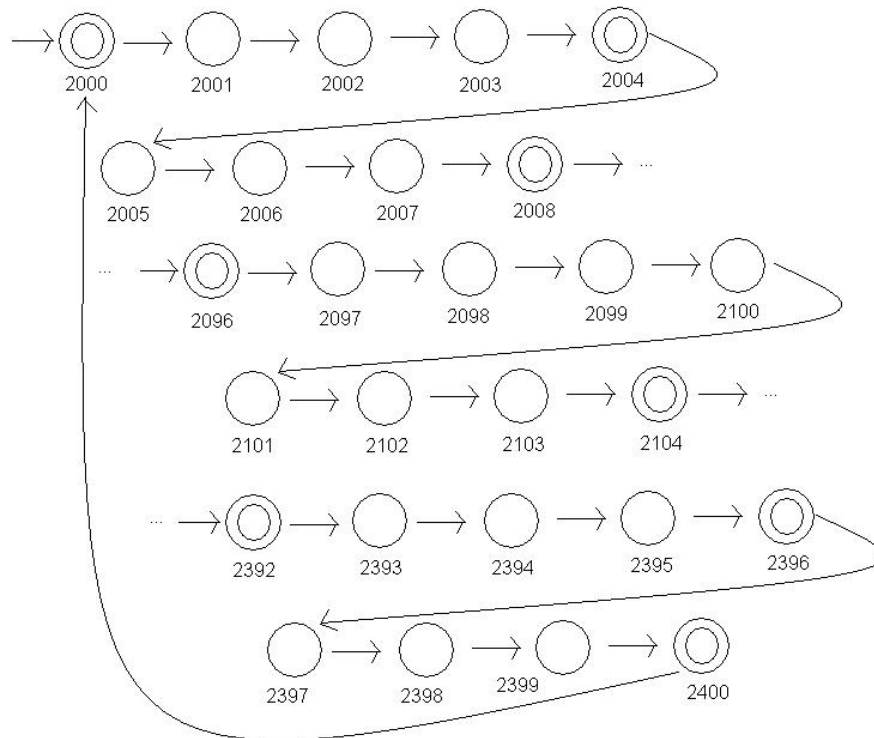


Abbildung 1: Automat zu Aufgabe 2

Aufgabe 3

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } w) \bmod 3 = 0 \wedge (\#b\text{'s in } w) \bmod 3 = 0\}$$

(a)

$$\begin{aligned} C_L(aaabbb) &= L \\ C_L(aaa) &= L \\ C_L(bbb) &= L \\ C_L(aabbb) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 1 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 0\} \\ &= L_1 \\ C_L(abbb) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 2 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 0\} \\ &= L_2 \\ C_L(aaabb) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 0 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 1\} \\ &= L_3 \\ C_L(aaab) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 0 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 2\} \\ &= L_4 \\ C_L(aabb) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 1 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 1\} \\ &= L_5 \\ C_L(abb) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 2 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 1\} \\ &= L_6 \\ C_L(aab) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 1 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 2\} \\ &= L_7 \\ C_L(ab) &= \{x \in \{a, b\}^* \mid (\#a\text{'s in } x) \bmod 3 = 2 \wedge (\#b\text{'s in } x) \bmod 3 = 2\} \\ &= L_8 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_L = L \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6 \cup L_7 \cup L_8$$

(b)

Zustände: $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$

Startzustand: $(0, 0)$

Endzustand: $(0, 0)$

Übergangsfunktion:

$$(x, y) \Rightarrow \begin{cases} ((x+1) \bmod 3, y) & : \text{liest } a \\ (x, (y+1) \bmod 3) & : \text{liest } b \end{cases}$$

Zeichnung:

Aufgabe 4

1. 0^*1^* .

Der Automat liest im Zustand A endlich viele 0. Liest er eine 1 geht er in Zustand B über. Dort akzeptiert er oder liest er eine endliche Folge von 1 und akzeptiert dann. Akzeptiert er hier noch nicht, sondern liest noch eine 0, dann geht der Automat in Zustand C über, wo er in einer endlosen Schleife hängt. Da Zustand C kein akzeptierender Endzustand ist, akzeptiert der Automat nur 0^*1^* .

2. $(0^*1^*)^*01$.

Der Automat liest im Zustand A endlich viele 0. Beim Lesen einer 1 geht er in Zustand B über. Dort kann er entweder eine endliche Folge von 1 lesen oder er geht beim Lesen einer 0 in den Zustand C über. Geht er von Zustand C beim Lesen von 0 in Zustand A über, beginnt der eben beschriebene Vorgang von vorne. Liest er jedoch eine 1, so geht er in Zustand D über und kann dort akzeptieren. Akzeptiert er dort noch nicht, so geht er beim Lesen einer 0 wieder in Zustand A über und es geht von vorne los (siehe Anfang der Beschreibung). Liest er eine 1, so geht er in Zustand B über und die oben beschriebenen Vorgänge gehen ab Zustand B weiter.

Aufgabe 5

1. Variante:

Ein endlicher Automat kann sich keine Zahl merken, die größer ist als die begrenzte Anzahl seiner Zustände.

- (a) Er kann sich nicht merken, wieviele a 's es schon waren, also auch nicht, ob es eine 2er Potenz ist.
- (b) Er kann sich die Differenz zwischen a 's und b ' nicht merken.

2. Variante:

(a)

$$L_1 = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Sei N die nächst größere 2er Potenz nach der Zahl des Pumping Lemmas für L_1 . Dann ist $w = a^{2 \cdot N} \in L_1$ (da $2 \cdot N = 2^{(1+\log_2 N)}$, $|w| > N$).

Dann gibt es eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|y| > 0$, $|xy| \leq N$, sodass für alle i $xy^i z$ auch $\in L_1$.

Nach dem Pumping Lemma muss $w_2 = wy^2z = wyyz \in L_1$ sein.

$$|w_2| = |wyyz| = |wyz| + |y| \in \{|w| + 1, \dots, |w| + N\}$$

Das nächst längere Wort nach w in L_1 ist aber $a^{4 \cdot N}$ $\nmid$

(b)

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a(w) = \#b(w)\}$$

Sei N die Zahl des Pumping Lemmas für L_2 . Dann ist $w = a^N b^N \in L_2$ (da $\#a(w) = \#b(w) = N$). $|w| > N$.

Dann gibt es eine Zerlegung $w = xyz$ mit $|y| > 0$, $|xy| \leq N$, sodass für alle i $xy^i z$ auch $\in L_2$.

Da $w = a^N b^N$, besteht xy nur aus a 's. Also $w = a^{|x|} a^{|y|} a^{(N-|x|-|y|)} b^N$.

Dann ist nach dem Pumping Lemma auch $w_i = a^{|x|} [a^{|y|}]^i a^{(N-|y|)} b^N \in L_2$. Aber $|y| > 0$. $\nmid$