

Theoretische Informatik - Übungsblatt 11

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259

Dirk Heine - Matrikelnummer 2030941

Di, 9-11 Uhr, Andreas Augustin

Aufgabe 1

bearbeitet von Dirk Heine

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

Angenommen $\exists c \in \mathbb{R}$ so dass $g(n) \leq c \cdot f(n) \quad \forall n \geq n_0$.

Dann müsste gelten $g(2n_0 + 1) \leq c \cdot f(2n_0 + 1) \Leftrightarrow 1 \leq 0$. $\nexists$

$\Rightarrow g \notin \mathcal{O}(f)$.

Angenommen $\exists c \in \mathbb{R}$ so dass $f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$.

Dann müsste gelten $f(2n_0) \leq c \cdot g(2n_0) \Leftrightarrow 1 \leq 0$. $\nexists$

$\Rightarrow f \notin \mathcal{O}(g)$.

Aufgabe 2

bearbeitet von Jan Hendrik Dithmar

Folgende Funktionen sind nach ihrem asymptotischen Wachstum für $n \rightarrow \infty$ wie folgt geordnet, beginnend mit der Funktion mit dem schwächsten Wachstum bis zur Funktion mit dem stärksten Wachstum:

$$\log(n), \quad \sqrt{n}, \quad n \cdot \log(n), \quad n^{\frac{4}{3}}, \quad n^2 \cdot \log(n), \quad n^{2+\varepsilon} (\varepsilon > 0), \quad e^{\sqrt{n}}, \quad 2^n$$

Vorbemerkungen:

1. Unter $\log(n)$ soll der natürliche Logarithmus $\ln(n)$ verstanden werden.
2. Aus der Analysis wird als bekannt vorausgesetzt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^\alpha} = 0 \text{ für jedes } \alpha > 0$$

3. Aus der Analysis wird die 2. Regel von de l'Hospital als bekannt vorausgesetzt.

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{wegen 2.}$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n \cdot \log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \log(n)} = 0$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log(n)}{n^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad \text{wegen 2.}$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^2 \cdot \log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}} \cdot \log(n)} = 0$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \log(n)}{n^{2+\varepsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^\varepsilon} = 0 \quad \text{wegen 2. mit } \alpha = \varepsilon > 0$$

•

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2+\varepsilon}}{3\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2+\varepsilon}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}} \quad \varepsilon > 0 \\
&\stackrel{3.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+\varepsilon) \cdot n^{1+\varepsilon}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)} \cdot (\ln(3)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}} \\
&= \frac{\prod_{i=4}^4 (i+2\varepsilon)}{\ln(3)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}} \\
&\stackrel{3.}{=} \frac{2 \cdot (2+\varepsilon)}{\ln(3)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{3}{2}+\varepsilon) \cdot n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)} \cdot \ln(3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}} \\
&= \frac{\prod_{i=3}^4 (i+2\varepsilon)}{(\ln(3))^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\varepsilon}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}} \\
&\stackrel{3.}{=} \frac{2^2 \cdot (2+\varepsilon) \cdot (\frac{3}{2}+\varepsilon)}{(\ln(3))^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\varepsilon) \cdot n^\varepsilon}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)} \cdot \ln(3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}} \\
&= \frac{\prod_{i=2}^4 (i+2\varepsilon)}{(\ln(3))^3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\varepsilon+\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}} \\
&\stackrel{3.}{=} \frac{2^3 \cdot (2+\varepsilon) \cdot (\frac{3}{2}+\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon)}{(\ln(3))^3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{2}+\varepsilon) \cdot n^{\varepsilon-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)} \cdot \ln(3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^4 (i+2\varepsilon)}{(\ln(3))^4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\varepsilon}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}} \\
&\stackrel{3.}{=} \frac{2^4 \cdot (2+\varepsilon) \cdot (\frac{3}{2}+\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon) \cdot (\frac{1}{2}+\varepsilon)}{(\ln(3))^4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \cdot n^{\varepsilon-1}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)} \cdot \ln(3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}} \\
&= \underbrace{\frac{\prod_{i=0}^4 (i+2\varepsilon)}{(\ln(3))^5}}_{=: k_\varepsilon > 0} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\varepsilon-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}} \\
&= k_\varepsilon \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\varepsilon-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}} \\
&= k_\varepsilon \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot 3\sqrt{n}} = 0 \quad \text{falls gilt: } 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Andernfalls setze man das Verfahren fort, bis der Exponent von n , nämlich $2 + \varepsilon - m \cdot \frac{1}{2}$ für ein $m \in \mathbb{Z}^+$ erstmals negativ ist.

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2+\varepsilon}}{3\sqrt{n}} = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

• Es gilt:

$$3\sqrt{n} < (2^2)^{\sqrt{n}} = 2^{2 \cdot \sqrt{n}} \stackrel{n \geq 4}{\leq} 2^{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = 2^n$$

$$\begin{aligned} &\implies 3^{\sqrt{n}} < 2^n \quad \forall n \geq 4 \\ &\iff \frac{3^{\sqrt{n}}}{2^n} < 1 \quad \forall n \geq 4 \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)}}{e^{n \cdot \ln(2)}} \\ &\stackrel{3.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n} \cdot \ln(3)} \cdot \ln(3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}}{e^{n \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2)} \\ &= \frac{\ln(3)}{2 \cdot \ln(2)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{3^{\sqrt{n}}}{2^n}}_{<1, \forall n \geq 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\stackrel{(I)}{\leq} \frac{\ln(3)}{2 \cdot \ln(2)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

bearbeitet von Jan Hendrik Dithmar

- $g \in \Theta(f) \implies f \in \Theta(g)$:

Zeige dazu:

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{O}(f) &\iff \exists c > 0 : g \leq_{\text{f\"u}} c \cdot f \\ &\iff \frac{1}{c} \cdot g \leq_{\text{f\"u}} f \\ &\iff c' \cdot g \leq_{\text{f\"u}} f \quad \text{mit } c' = \frac{1}{c} > 0 \\ &\iff f \geq_{\text{f\"u}} c' \cdot g \\ &\iff f \in \Omega(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \in \Omega(f) &\iff \exists c > 0 : g \geq_{\text{f\"u}} c \cdot f \\ &\iff \frac{1}{c} \cdot g \geq_{\text{f\"u}} f \\ &\iff c' \cdot g \geq_{\text{f\"u}} f \quad \text{mit } c' = \frac{1}{c} > 0 \\ &\iff f \leq_{\text{f\"u}} c' \cdot g \\ &\iff f \in \mathcal{O}(g) \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{O}(f) \wedge g \in \Omega(f) &\implies g \in \Theta(f) \\ f \in \mathcal{O}(g) \wedge f \in \Omega(g) &\implies f \in \Theta(g) \end{aligned}$$

Daraus folgt letztendlich:

$$g \in \Theta(f) \implies f \in \Theta(g)$$

- $g \in \Theta(f) \iff f \in \Theta(g)$:
analog (f und g vertauschen!)
- $f \in \Theta(g) \implies \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$:

$$\left. \begin{array}{l} f \in \Theta(g) \implies f \in \mathcal{O}(g) \\ g \in \Theta(f) \implies g \in \mathcal{O}(f) \end{array} \right\} \implies \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g), \text{ da } f \in \Theta(g) \iff g \in \Theta(f)$$

- $f \in \Theta(g) \iff \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$:

Da $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$, gilt:

- $f \in \mathcal{O}(g)$
- $g \in \mathcal{O}(f)$

Da $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$ gelten, gilt auch:

- $f \in \Omega(g)$ (ähnliche Rechnung wie vorne)
- $g \in \Omega(f)$ (ähnliche Rechnung wie vorne)

Somit gilt:

$$f \in \mathcal{O}(g) \wedge f \in \Omega(g) \iff f \in \Theta(g)$$

und insbesondere:

$$f \in \mathcal{O}(g) \wedge f \in \Omega(g) \iff f \in \Theta(g)$$

Aufgabe 4

bearbeitet von Jan Hendrik Dithmar

- $f \in \Theta(g) \implies o(f) = o(g)$:

$$f \in \Theta(g) \iff f \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f)$$

Sei $h \in o(f)$, d.h. $\forall c > 0 \exists n_0 : h(n) < c \cdot f(n) < cd \cdot g(n)$ mit d aus der Definition von $\mathcal{O}(g)$.

Sei nun $c' > 0$ beliebig. Setze $c := \frac{c'}{d}$.

Somit muss $h \in o(g)$.

- $f \in \Theta(g) \iff o(f) = o(g)$: analog