

Theoretische Informatik - Übungsblatt 1

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259

Di, 9-11 Uhr, Andreas Augustin

Aufgabe 1

(a)

1. Zu zeigen: M abzählbar $\Rightarrow M$ nummerierbar.

Beweis:

1. Fall: M ist endlich: $M := \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Definiere folgende Abbildung

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; k \mapsto \begin{cases} a_k & , k \in \{0, \dots, n-1\} \\ a_{n-1} & , k \in \{n, n+1, \dots\} \end{cases}$$

Es ist $f(\mathbb{N}) = M$, d.h. f ist surjektiv.

$\Rightarrow M$ ist nummerierbar.

2. Fall: M ist nicht endlich, dann gibt es n. Vor. (M abzählbar) eine Bijektion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists$ die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow M$ und f^{-1} ist ebenfalls bijektiv.

$\Rightarrow f^{-1} : M \rightarrow \mathbb{N}$ ist insbesondere surjektiv, d.h. M nummerierbar.

2. Zu zeigen: M abzählbar $\Rightarrow M$ aufzählbar.

Beweis:

1. Fall: M ist endlich: $M := \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Definiere folgende Abbildung

$$g : M \rightarrow \mathbb{N}; a_k \mapsto k+1 \quad , k \in \{0, \dots, n-1\}$$

g ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} a_i, a_j \in M \wedge a_i \neq a_j &\Rightarrow i \neq j \\ &\Leftrightarrow i+1 \neq j+1 \\ &\Leftrightarrow g(a_i) \neq g(a_j) \end{aligned}$$

Aus $g : M \rightarrow \mathbb{N}$ injektiv $\Rightarrow M$ ist aufzählbar.

2. Fall: M ist nicht endlich, dann gibt es n. Vor. (M abzählbar) eine Bijektion $g : M \rightarrow \mathbb{N}$

$\Rightarrow g : M \rightarrow \mathbb{N}$ ist insbesondere injektiv, d.h. M ist aufzählbar.

3. Es bleibt noch zu zeigen: M nummerierbar und M aufzählbar $\Rightarrow M$ abzählbar

(b)

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis:

- (I) Zeige zunächst: die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar.
 Betrachte dazu folgende Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; n \mapsto \begin{cases} 2n & , n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ -2n - 1 & , n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

- (1) φ ist surjektiv, denn:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) &= \{0, 2, 4, 6, \dots\} =: G \\ \varphi(\mathbb{Z}^-) &= \{1, 3, 5, \dots\} =: U \\ \Rightarrow \varphi(\mathbb{Z}) &= \varphi(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \cup \varphi(\mathbb{Z}^-) \\ &= G \cup U \\ &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

- (2) φ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \wedge n_1 \neq n_2 &\Rightarrow 2n_1 \neq 2n_2 \\ &\Leftrightarrow \varphi(n_1) \neq \varphi(n_2) \\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^- \wedge n_1 \neq n_2 &\Rightarrow -2n_1 - 1 \neq -2n_2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \varphi(n_1) \neq \varphi(n_2) \\ n_1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \wedge n_2 \in \mathbb{Z}^- &\Rightarrow \varphi(n_1) \in G \wedge \varphi(n_2) \in U \\ &\Leftrightarrow \varphi(n_1) \neq \varphi(n_2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ist bijektiv, d.h. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig und somit ist $\mathbb{Z}$ abzählbar.

- (II) Betrachte für jede feste natürliche Zahl $k \geq 1$ die Menge

$$B_k := \left\{ \frac{n}{k} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Da $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, ist B_k für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ abzählbar. Da $\mathbb{N}$ abzählbar ist, ist die Menge aller B_k abzählbar.

Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ebenfalls abzählbar.

$$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}_{\geq 1}} B_k \text{ ist abzählbar}$$

und wegen

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_{\geq 1}} B_k$$

ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar.

Aufgabe 2

A endliche Menge $\Leftrightarrow A := \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$. $M := \{f : A \rightarrow \mathbb{N}\}$

Definiere eine Funktion

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}; a_i \mapsto i, i \in \mathbb{N}$$

Somit ist die Menge M endlich, da die Menge A endlich ist und es dadurch nur endlich viele Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ gibt. Da M endlich ist, ist sie auch abzählbar.