Computer Architecture 1 - Übungsblatt 2

Dirk Heine, 2030941
Jan Hendrik Dithmar, 2031259
Steffen Heil, 2019358

Aufgabe 1: bijection

(i)

Beweis: Die Abbildung

$$\langle\ \rangle : \{0,1\}^n \to \{0, ..., 2^n - 1\};\ \langle a \rangle := \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

ist bijektiv.

1. **Injektivität**
   Seien $a, b \in \{0,1\}^n$ und $a \neq b$.
   Sei $k = \max\{i | a_i \neq b_i\}$ und o.B.d.A. $a_k < b_k$.

   $$a_k < b_k \quad \Rightarrow \quad a_k = 0 \wedge b_k = 1$$

   Damit:

   $$\begin{aligned}
   \langle a \rangle - \langle b \rangle &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \\
   &= \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i 2^i + a_k 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i \\
   &\quad - \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} b_i 2^i + b_k 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i \right) \\
   &= \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i 2^i - \sum_{i=k+1}^{n-1} b_i 2^i + a_k 2^k - b_k 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i - \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i \\
   &= 0 \cdot 2^k - 1 \cdot 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i - \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i \\
   &< 0
   \end{aligned}$$

2. **Surjektivität**
   Da $\#(\{0,1\}^n) = 2^n = \#(\{0, ..., 2^n - 1\})$ und da $\langle\rangle$ injektiv ist, ist $\langle\rangle$ surjektiv.

Damit ist gezeigt, dass $\langle\rangle$ bijektiv ist.

(ii)

Beweise: Die Abbildung

$$[\ ] : \{0,1\}^n \to \{-2^{n-1}, ..., 2^{n-1} - 1\};\ [a] := -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0] \rangle$$

ist bijektiv.

1. **Injektivität**
   Seien $a, b \in \{0,1\}^n$ und $a \neq b$.

(a) $a_{n-1} = b_{n-1}$

$$\begin{aligned} & a[n-2:0] \neq b[n-2:0] \\ \Rightarrow\quad & \langle a[n-2:0]\rangle \neq \langle b[n-2:0]\rangle \\ \Rightarrow\quad & -2^{n-1}a_{n-1} + \langle a[n-2:0]\rangle \neq -2^{n-1}b_{n-1} + \langle b[n-2:0]\rangle \\ \Rightarrow\quad & [a] \neq [b] \end{aligned}$$

(b) $a_{n-1} \neq b_{n-1}$, o.B.d.A. sei $a_{n-1} < b_{n-1}$

$$\begin{aligned} & \langle a[n-2:0]\rangle \geq 0 \wedge \langle b[n-2:0]\rangle < 2^{n-1} \\ \Rightarrow\quad & -2^{n-1}a_{n-1} + \langle a[n-2:0]\rangle \geq 0 > -2^{n-1}b_{n-1} + \langle b[n-2:0]\rangle \\ \Rightarrow\quad & [a] \neq [b] \end{aligned}$$

2. **Surjektivität**
Da $\#(\{0,1\}^n) = 2^n = \#(\{-2^{n-1}, ..., 2^{n-1}-1\})$ und da [ ] injektiv ist, ist [ ] surjektiv.

Damit ist gezeigt, dass [ ] bijektiv ist.

Aufgabe 2: associativity

$$\begin{aligned}
((g_2,p_2)\circ(g_1,p_1))\circ(g_3,p_3) &= (g_2\vee(g_1\wedge p_2), p_1\wedge p_2)\circ(g_3,p_3)\\
&= ([g_2\vee(g_1\wedge p_2)]\vee[g_3\wedge(p_1\wedge p_2)], p_1\wedge p_2\wedge p_3)\\
&= (g_2\vee[(p_2\wedge g_1)\vee(p_2\wedge(g_3\wedge p_1))], p_1\wedge p_2\wedge p_3)\\
&= (g_2\vee[p_2\wedge(g_1\vee(g_3\wedge p_1))], p_1\wedge p_2\wedge p_3)\\
&\overset{(*)}{=} (g_2\vee[(g_1\vee(g_3\wedge p_1))\wedge p_2], p_1\wedge p_2\wedge p_3)\\
&\overset{(*)}{=} (g_2,p_2)\circ(g_1\vee(g_3\wedge p_1), p_1\wedge p_3)\\
&\overset{(*)}{=} (g_2,p_2)\circ((g_1,p_1)\circ(g_3,p_3))
\end{aligned}$$

□

Beweis von $(*)$:

$$\begin{aligned}
(g_2,p_2)\circ((g_1,p_1)\circ(g_3,p_3)) &= (g_2,p_2)\circ(g_1\vee(g_3\wedge p_1), p_1\wedge p_3)\\
&= (g_2\vee((g_1\vee(g_3\wedge p_1))\wedge p_2), p_1\wedge p_2\wedge p_3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: cost of parallel prefix computation

$$
\begin{aligned}
C(l) &= \sum_{i=1}^{l}(2^i - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{l} 2^i - l \\
&= \sum_{i=0}^{l} 2^i - 1 - l \\
&= 2^{l+1} - 1 - 1 - l \\
&= 2^{l+1} - l - 2
\end{aligned}
$$

Ind(l): ($n = 2^l$)

- $l = 1$:

$$
\begin{aligned}
C(1) &= 1 \\
&= 2^{1+1} - 1 - 2
\end{aligned}
$$

- $l \rightsquigarrow l + 1$:

$$
\begin{aligned}
C(l) &= C(l-1) + 2^l - 1 \\
&\overset{IV}{=} 2^l - (l-1) - 2 + 2^l - 1 \\
&= 2^{l+1} - l - 2
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 4: Adder

$$neg \stackrel{!}{=} a_{n-1} \oplus b_{n-1} \oplus c_{n-1}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
[a] + [b] + c_{in} &= -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0] \rangle - b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle b[n-2:0] \rangle + c_{in} \\
&= -(a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} + \underbrace{\langle a[n-2:0] \rangle + \langle b[n-2:0] \rangle + c_{in}}_{\langle c_{n-2}, s[n-2:0] \rangle} \\
&= -(a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} + c_{n-2} \cdot 2^{n-1} + \langle s[n-2:0] \rangle \\
&= -2^{n-1}(\underbrace{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-2}}_{\langle c_{n-1}, s_{n-1} \rangle} - 2c_{n-2}) + \langle s[n-2:0] \rangle \\
&= -2^{n-1}(2c_{n-1} + s_{n-1} - 2c_{n-2}) + \langle s[n-2:0] \rangle \\
&= [s[n-1:0]] - 2^n(c_{n-1} - c_{n-2}) = \delta
\end{aligned}$$

Cases:

- $c_{n-1} = 1, c_{n-2} = 0$:

$$\begin{aligned}
\delta &= [s] - 2^n \\
&= -2^n - \underbrace{[s[n-1:0]]}_{\leq 2^{n-1}-1} \\
&\leq -2^{n-1} - 1 \notin T_n
\end{aligned}$$

- $c_{n-1} = 0, c_{n-2} = 1$:

$$\begin{aligned}
\delta &= [s] + 2^n \\
&= 2^n + \underbrace{[s[n-1:0]]}_{\geq -2^{n-1}} \\
&\geq 2^{n-1} \notin T_n
\end{aligned}$$

- $c_{n-1} = c_{n-2}$:

$$\delta = [s] \in T_n$$

Looking at case $c_{n-1} = c_{n-2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \delta &= [s[n-1:0]] \\
&= -s_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle s[n-2:0] \rangle \\
&= -2^{n-1}(a_{n-1} + b_{n-1} - c_{n-2}) + \langle s[n-2:0] \rangle
\end{aligned}$$

a_{n-1}	b_{n-1}	$c_{n-1} = c_{n-2}$	$(a_{n-1} + b_{n-1} - c_{n-2})[0]$	$neg = a_{n-1} \oplus b_{n-1} \oplus c_{n-1}$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	0	0	0
0	0	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1