

Nutzenermittlung bei Sicherheit und mehreren Zielen

Problematik bei mehreren Zielen:

Zielkonflikte

Überwindung von Zielkonflikten:

Verschiedene Nutzenfunktionen müssen miteinander verknüpft werden. Dazu wird in der Regel von einem *additiven Modell* mit Gewichtung der Ziele ausgegangen.

- *Nutzenwertanalyse* überlässt die Bestimmung von Zielgewichten und Nutz(en)werten vollständig der Intuition des Entscheidungsträgers.
- *Multiattributive Nutzentheorie* legt die Zielgewichte mit Hilfe von Austauschraten so fest, dass sie die Nutzenbeiträge der verschiedenen Ziele zum Gesamtnutzen korrekt widerspiegeln.

Nutzenwertanalyse

(Scoring-Modell, Scoring-Verfahren, Punktbewertungsverfahren)

- Beliebtes Verfahrensprinzip, das v.a. dann zum Einsatz kommt, wenn einige oder alle Ziele nicht ohne weiteres quantifizierbar sind.
- Nutzenwertanalyse bezieht den subjektiven Nutzenwert des Entscheidungsträgers in Form von Punktwerten in die Beurteilung mit ein.
- Es werden gleichzeitig Bewertungs- und Zielsetzungsdefekte beseitigt, da sowohl für jedes Kriterium eine Beurteilung der Nutzenhöhe als auch die Bestimmung des Gesamtnutzens einer Alternative durch Gewichtung der Ziele erfolgt.

Grundversion der Nutzenwertanalyse:

- Es wird davon ausgegangen, dass eine Menge möglicher Handlungsalternativen, indiziert mit $i = 1, \dots, m$ anhand von Zielen $h = 1, \dots, k$ zu beurteilen ist.
- Der Gesamtnutzen N_i einer Handlungsalternative a_i , in dem Zielgewichte λ_h und Nutz(en)werte (zugeordnete Punktwerte) u_{ih} eingehen, wird gemäß einer additiven Zielgewichtung mit Hilfe folgender Formel berechnet:

$$N_i = \sum_{h=1}^k \lambda_h \cdot u_{ih}$$

Schritt 1: *Zielformulierung*

- Bei der Zielformulierung ist darauf zu achten, dass die einzelnen Ziele möglichst unabhängig voneinander sind, d.h. dass zur Vergabe eines Nutzenwertes für ein Kriterium nicht die Kenntnis der Ausprägung eines anderen Kriteriums erforderlich ist.
- Des Weiteren ist bei der Auswahl der Kriterien darauf zu achten, dass die Ziele sich sinnvoll quantifizieren lassen, d.h. sie müssen mindestens ordinal skalierbar sein.

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Schritt 2: *Festlegung von Zielgewichten*

→ Dabei unterscheidet man zwei Vorgehensweisen

Vorgehensweise 1:

Vergleich aller Paare von Kriterien nach der *relativen Wichtigkeit*. Als Gewicht von λ_h verwendet man den Quotienten aus der Anzahl von Fällen, in denen das Kriterium h als wichtiger als ein anderes Kriterium eingeschätzt wird, und der Gesamtanzahl $k \cdot (k-1)/2$ der Vergleiche.

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Vorgehensweise 2:

Bei der *Verteilungsmethode* wird eine Gesamtpunktzahl von z.B. 100 Punkten auf die Kriterien verteilt. Die Gesamtpunktzahl wird je nach Wichtigkeit auf die verschiedenen Gruppen verteilt. Das gleiche geschieht innerhalb der Gruppe. Durch Division jeder Punktzahl durch die Gesamtpunktzahl (100) ergebenen sich normierte Gewichte λ_h , d.h. es gilt:

$$\sum_h \lambda_h = 1$$

Schritt 3: *Festlegung der subjektiven Nutzenwerte u_{ih}*

Die Kriterien $h = 1, \dots, k$ werden dabei unabhängig voneinander betrachtet. Auch hierfür existieren verschiedene Vorgehensweisen:

Vorgehensweise 1:

Die vorliegenden Handlungsalternativen werden anhand ihrer Ausprägungen für ein Kriterium k in eine Reihenfolge gebracht. Die Alternative mit der am besten beurteilten Ausprägung erhält den Punktwert k , die nächste den Punktwert $k - 1$ usw., so dass für jedes Kriterium die Punktwerte $k, \dots, 1$ auf die Alternativen als Nutzwerte verteilt werden.

Vorgehensweise 2:

Die Punktwerte werden so angeordnet, dass sie den Erfüllungsgrad des Kriteriums widerspiegeln (z.B. von 0 bis 100). Dabei ist es sinnvoll, den Nutzenwert zu normieren, so dass für jedes Kriterium derselbe maximale Nutzenwert erreichbar ist.

Ansonsten ergibt sich bei der anschließenden Gesamtnutzenbestimmung eine Verfälschung der Zielgewichtung.

Schritt 4: *Bestimmung des Gesamtnutzens N_i*

Abschließend wird für jede Handlungsalternative a_i der Gesamtnutzen N_i ($N_i = \sum_{h=1}^k \lambda_h \cdot u_{ih}$) bestimmt.

- Diejenige mit höchstem Wert wird bezüglich der berücksichtigten Kriterien am besten beurteilt.
- Da in sämtlichen Schritten subjektive Einschätzungen eingehen, ist es sinnvoll, die sich ergebende Reihung der Handlungsalternativen auf ihre Stabilität bei den Veränderungen der Gewichte und Nutzenwerte zu überprüfen, z.B. durch *Sensitivitätsanalysen*.

Kritische Beurteilung des Nutzenwertes

- (+) Nutzenwertanalyse kann dem Anwender eine Hilfe zur Vorauswahl von Alternativen bieten.
- (–) Als dimensionslose Zahl ist der Nutzenwert schwer zu interpretieren.
- (–) Durch die Bildung des Gesamtnutzens gehen Informationen verloren.
- (–) Schlechtes Erfüllen eines Kriteriums kann durch sehr gutes Erfüllen eines anderen Kriteriums kompensiert werden.

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Nutzenermittlung bei Unsicherheit und einem Ziel

Bei Entscheidung unter Risiko $\rightarrow$ *Risikonutzenfunktion*

Beispiel 1: Gegeben sei folgende Gewinnmatrix mit $n = 2$ gleichwahrscheinlichen Szenarien und 6 möglichen Alternativen.

	$p_1 = 0,5$	$p_2 = 0,5$
	s_1	s_2
a_1	300	-300
a_2	-300	300
a_3	350	300
a_4	400	400
a_5	350	450
a_6	0	800

Frage:

In welche Rangfolge bringt ein Entscheidungsträger die 6 Alternativen hinsichtlich seiner Präferenz?

Lösung:

- $a_1 \sim a_2$
- a_3 dominiert a_1 und a_2
- a_3 wird von a_4 und a_5 dominiert

Problem:

Vergleich zwischen a_4, a_5 und a_6 hängt von der Risikopräferenz des Entscheidungsträgers ab.
(z.B. $a_5 \gg a_4 \rightarrow$ Risikosympathie oder
 $a_4 \gg a_5 \rightarrow$ Risikoaversion).

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Beispiel 2:

Soll ein Gebäude gegen Brandschäden versichert werden, wenn folgende Daten vorliegen:

a_1 : Abschluss einer Versicherung; Zahlung der Prämie P ,

a_2 : Es wird kein Abschluss getätigt,

s_1 : Brand mit einem Totalschaden in Höhe von 20 Mio. GE ($p_1 = 10^{-4}$),

s_2 : Kein Brand; bei a_1 ergibt sich ein Verlust in Höhe der Prämie P ($p_2 = 1 - 10^{-4}$)?

	$p_1 = 10^{-4}$	$p_2 = 1 - 10^{-4}$
	s_1	s_2
a_1	$-P$	$-P$
a_2	-20 Mio.	0

Verlustmatrix aus Sicht des Versicherungsnehmers

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Ermittlung eines möglichen Wertes für P aus Sicht der Versicherung

Durchschnittlich zu erwartender Schaden:

$$20.000.000 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (1 - 10^{-4}) = 2.000 \text{ GE} := -\mu(a_2)$$

→ Prämie der Versicherung $P > 2000 \text{ GE}$ (z.B. 2500 GE)

Sicht des Versicherungsnehmers:

Für den Versicherungsnehmer stellt sich die Frage, ob der Abschluss der Versicherung rentabel ist, obwohl der erwartete Schaden $-\mu(a_2) = 2000$ kleiner als die zu zahlende Prämie P ist.

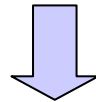
→ Die meisten werden den Vertrag abschließen, da sie risikoscheu sind und sich nicht nur am Erwartungswert orientieren.

Das Bernoulli-Prinzip

Es existiert eine auf der Menge der möglichen Auszahlungen definierte (Risiko-) Nutzenfunktion $u: e_{ij} \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Auszahlung (allgemein jedem Ergebnis) e_{ij} einen Nutzen zuordnet.

Als Entscheidungskriterium für eine Alternative a_i soll der Nutzenerwartungswert $Eu(a_i)$ herangezogen werden:

$$Eu(a_i) := \sum_{j=1}^n u(e_{ij}) \cdot p_j$$



Ermittlung des Nutzenerwartungswertes für Beispiel 2:

$$Eu(a_1) = u(-2.500) \cdot 10^{-4} + u(-2.500) \cdot (1 - 10^{-4}) = u(-2.500)$$

$$Eu(a_2) = u(-20.000.000) \cdot 10^{-4} + u(0) \cdot (1 - 10^{-4})$$

Möglichkeiten der Ermittlung von Risikonutzenfunktionen

Annahme: Entscheidungsträger handeln rational

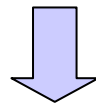
→ Ermittlung einer subjektiver Nutzenfunktionen

Ausgangssituation: einfache Entscheidungssituation mit zwei Aktionen:

a_1 : Die Aktion liefert mit Sicherheit die Auszahlung v .

a_2 : Die Aktion liefert mit Wahrscheinlichkeit p eine Auszahlung x
und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ eine höhere Auszahlung y .

→ $a_2 := (\text{Basis-Referenz-})\text{Lotterie mit } a_2 = (x; p \mid y; 1-p)$



Erwartungswert der Auszahlung der Lotterie:

$$E(x,y,p) := x \cdot p + y \cdot (1 - p)$$

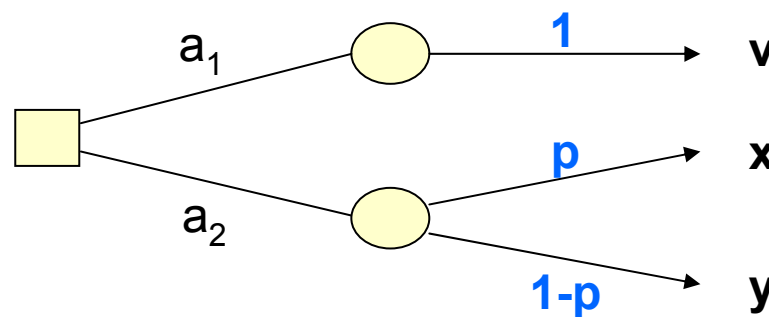
4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Sicherheitsäquivalent:

Je nach Risikoeinstellung wird ein Entscheidungsträger zwischen der Lotterie a_2 und der sicheren Auszahlung v von Aktion a_1 bei unterschiedlichen Werten von v indifferent sein. Eine solche sichere Auszahlung v wird als *Sicherheitsäquivalent* der Lotterie a_2 bezeichnet.

→ Zusammenhang zur Bestimmung des Nutzenwertes:

$$u(v) \cdot 1 = u(x) \cdot p + u(y) \cdot (1 - p)$$



Entscheidungsbaum

Bestimmung einer subjektiven Nutzenfunktion:

Aufgrund des Konzepts des Sicherheitsäquivalents wählt man x möglichst klein und y möglichst groß und ordnet diesen Ergebnissen die Nutzenwerte $u(x) = 0$ und $u(y) = 1$ zu.

→ $u(v) \cdot 1 = u(x) \cdot p + u(y) \cdot (1 - p)$ vereinfacht sich zu $u(v) = 1 - p$.

Bestimmung der Nutzenwerte $u(e)$:

Die Nutzenwerte $u(e)$ für Ereignisse e sind so zu bestimmen, dass sie die Risiko- und Wertpräferenz des Entscheidungsträgers möglichst genau widerspiegeln.

Dazu lassen sich verschiedene Methoden anwenden, bei denen jeweils drei der vier Größen x , y , p und v vorgegeben sind und die verbleibende Größe vom Entscheidungsträger erfragt wird.

Methoden zur Ermittlung der Nutzenwerte $u(e)$:

➤ Mittelwert-Kettungs-Methode:

- Wähle $p = 0,5$ und gebe x und y vor.
- Entscheidungsträger bestimmt das Sicherheitsäquivalent $v_{0,5}$ für die Lotterie $a_2 = (x; 0,5 \mid y; 0,5)$ und setzt $u(v_{0,5}) = 0,5$.
- Analog zur Vorgehensweise der Halbierungsmethode wird dasselbe auf die Intervalle $[x, v_{0,5}]$ und $[v_{0,5}, y]$ angewendet, um Sicherheitsäquivalente $v_{0,25}$ mit $u(v_{0,25})=0,25$ und $v_{0,75}$ mit $u(v_{0,75})=0,75$ zu bestimmen.
- Durch weitere Intervallhalbierungen werden zusätzliche Nutzenwerte ermittelt, bis sich die Form der Nutzenfunktion erkennen lässt.

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

➤ **Fraktilmethode:**

Die Werte x , y werden konstant gehalten und für verschiedene Wahrscheinlichkeiten werden die Sicherheitsäquivalente v_p bestimmt, wodurch sich Nutzenwerte $u(v_p) = 1 - p$ ergeben.

➤ **Methode variabler Wahrscheinlichkeiten:**

Die Werte x und y werden wiederum konstant gehalten und verschiedene Sicherheitsäquivalente v werden vorgegeben.

Für jeden Wert von v wird die Wahrscheinlichkeit p_v erfragt, so dass gilt:

$$v \sim E(x, y, p_v)$$

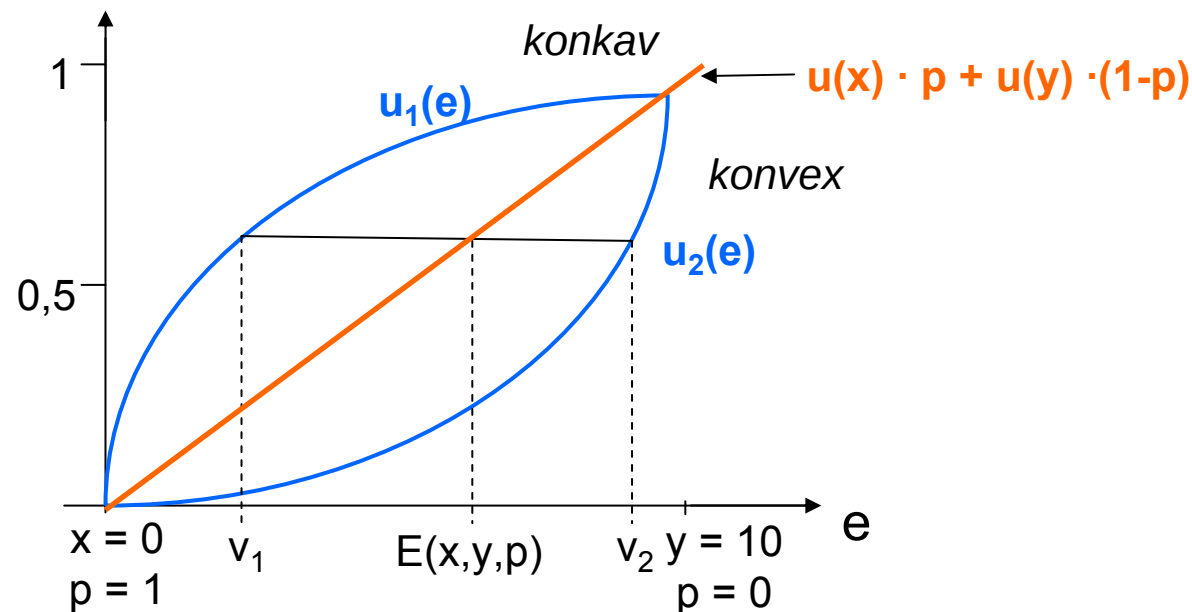
→ Nutzenwert: $u(v) = 1 - p_v$

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Die *Risikoeinstellung* des Entscheidungsträgers lässt sich an der Form der Nutzenfunktion erkennen:

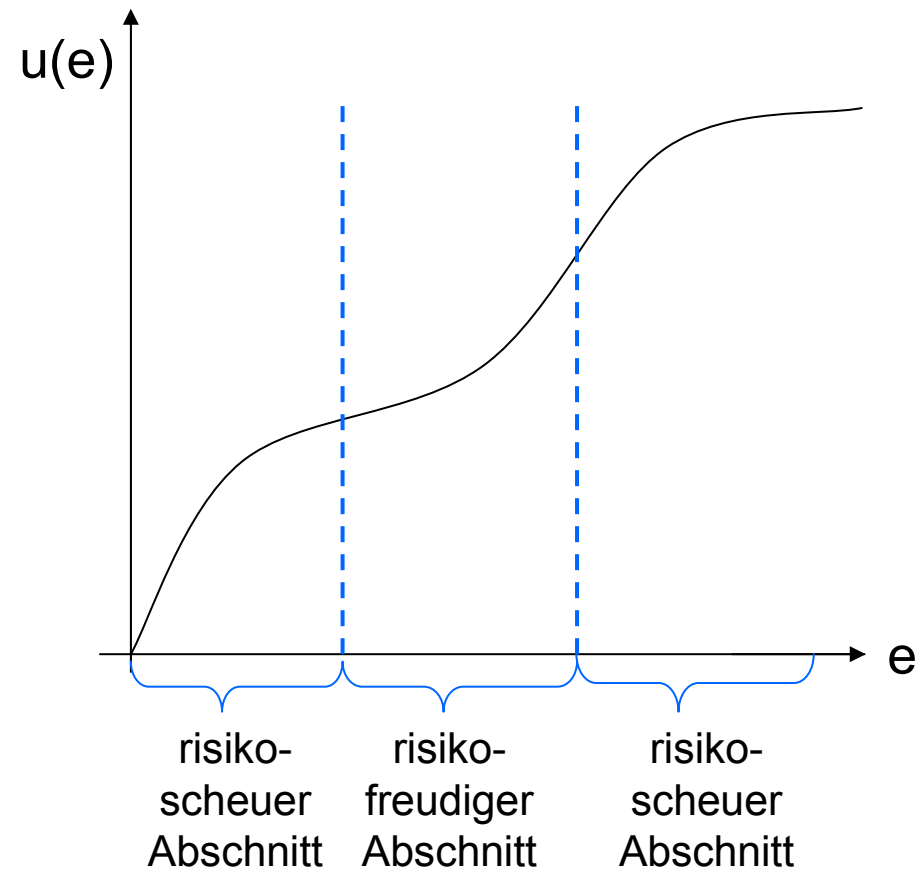
1. konvexe bzw. konkave Nutzenfunktionen

- konkave Funktion → der Entscheidungsträger ist risikoscheu
- konvexe Funktion → der Entscheidungsträger ist risikofreudig



4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

2. Nutzenfunktion nach Friedman und Savage:



4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Axiome des Bernoulli-Prinzip:

➤ *Ordnungsaxiom:*

Forderung: Die durch die Nutzenfunktion abgebildete Präferenzordnung muss

- *vollständig* ($a \ll b$, $a \gg b$ oder $a \sim b$) und
- *transitiv* ($a \gg b$ und $b \gg c \Rightarrow a \gg c$) sein.

➤ *Stetigkeitsaxiom:*

Für drei Ereignisse x , v und y mit $x \ll v \ll y$ gibt es eine Wahrscheinlichkeit p , so dass $v \sim E(x, y, p)$, d.h. $u(v) = u(x) \cdot p + u(y) \cdot (1 - p)$.

➤ *Substitutionsaxiom:*

x , y , v sind mögliche Ergebnisse und $p \in (0, 1)$ eine Wahrscheinlichkeit. $x \gg y$ gilt genau dann, wenn $E(x, v, p) \gg E(y, v, p)$ ist.

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

- Das μ - und das $(\mu - \delta)$ -Kriterium erfüllen die genannten Axiome nicht für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
- Auch Entscheidungsregeln bei Ungewissheit erfüllen nicht alle Axiome (Ausnahme: Laplace-Regel).

Beispiel:

Die Hurwicz-Regel verstößt gegen das Substitutionsaxiom. Durch Hinzunahme einer Umweltlage s_3 mit identischem Ergebnis e_{ij} ($=70$) für alle Aktionen i darf sich die Bewertungsreihenfolge nicht ändern. Dies geschieht aber im folgenden Beispiel ($\lambda = 0,5$):

	s_1	s_2	$\Phi_1(a_i)$	s_3	$\Phi_2(a_i)$
a_1	30	30	30	70	50
a_2	20	50	35	70	45

4. Entscheidungstheorie/ 4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

Bisher:

Treffen von einmaligen Entscheidungen (*:=statische Entscheidungsmodelle*)

Häufig:

Gegenseitige Beeinflussung der zu einem Zeitpunkt getroffenen und der zu einem späteren Zeitpunkt getroffenen Entscheidungen

- Betrachtung *dynamischer Modelle*: Dabei wird versucht, die jeweiligen Entscheidungen so zu treffen, dass die Ziele über dem gesamten Zeitraum bestmöglich erfüllt werden können.
- Bestimmung einer *optimalen Abfolge von Entscheidungen*.

4. Entscheidungstheorie/ 4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

➤ Bei sicherer Information:

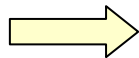
Planungszeitraum mit T Perioden ($t = 1, \dots, T$), wobei in jeder Periode t eine Aktion a_t auszuwählen ist.

→ Zielbeitrag (Auszahlung, Gewinn) e_t

Ziel:

$$\text{Max bzw. Min } \sum_t e_t$$

Die in jeder Periode t möglichen Aktionen sowie deren Zielbeiträge hängen vom Zustand z_{t-1} des Systems am Ende der Vorperiode $t-1$ ab.



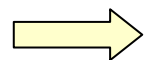
dynamische Optimierung bzw. Programmierung

4. Entscheidungstheorie/ 4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

➤ Bei Unsicherheit/ Risiko:

In jeder Periode können unterschiedliche Szenarien eintreten, über deren Eintrittswahrscheinlichkeit Informationen vorliegen (*Risiko*) oder nicht (*Ungewissheit*).

- Der Zielzustand z_t einer Periode bzw. die Entscheidungsstufe t hängen außer von dem Anfangszustand z_{t-1} und der Entscheidung a_t auch von dem eintretenden Szenario ab. Ebenso können auch die möglichen Szenarien von der getroffenen Entscheidung abhängen.
- Die Darstellung erfolgt mit Hilfe eines stochastischen Entscheidungsbaums.



stochastische dynamische Optimierung

4. Entscheidungstheorie/ 4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

Beispiel für ein zweiperiodiges stochastisches Entscheidungsproblem:

Eine Ölgesellschaft besitzt Bohrrechte für ein Stück Land. Bevor sie zu einem Zeitpunkt $t = 2$ möglicherweise einen Bohrauftrag vergibt, kann sie zum Zeitpunkt $t = 1$ einen seismischen Test ausführen lassen, der 30 (Millionen) GE kostet. Ein solches Gutachten liefert mit Wahrscheinlichkeit $p=0,6$ ein positives und mit $p=0,4$ ein negatives Ergebnis. Im Falle eines positiven Ergebnisses kommt mit der (bedingten) Wahrscheinlichkeit $p=0,85$ tatsächlich Öl vor, das beim Bohren an der durch den Test empfohlenen Stelle auch gefunden wird. Bei einem negativen Ergebnis beträgt die (bedingte) Wahrscheinlichkeit lediglich $p=0,1$. Wird ohne seismischen Test gebohrt, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Ölfund $p=0,55$. Der Bohrvorgang koste 100 GE. Bei einem Ölfund können die Bohrrechte für 400 GE verkauft werden, ansonsten sind sie wertlos.

4. Entscheidungstheorie/ 4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

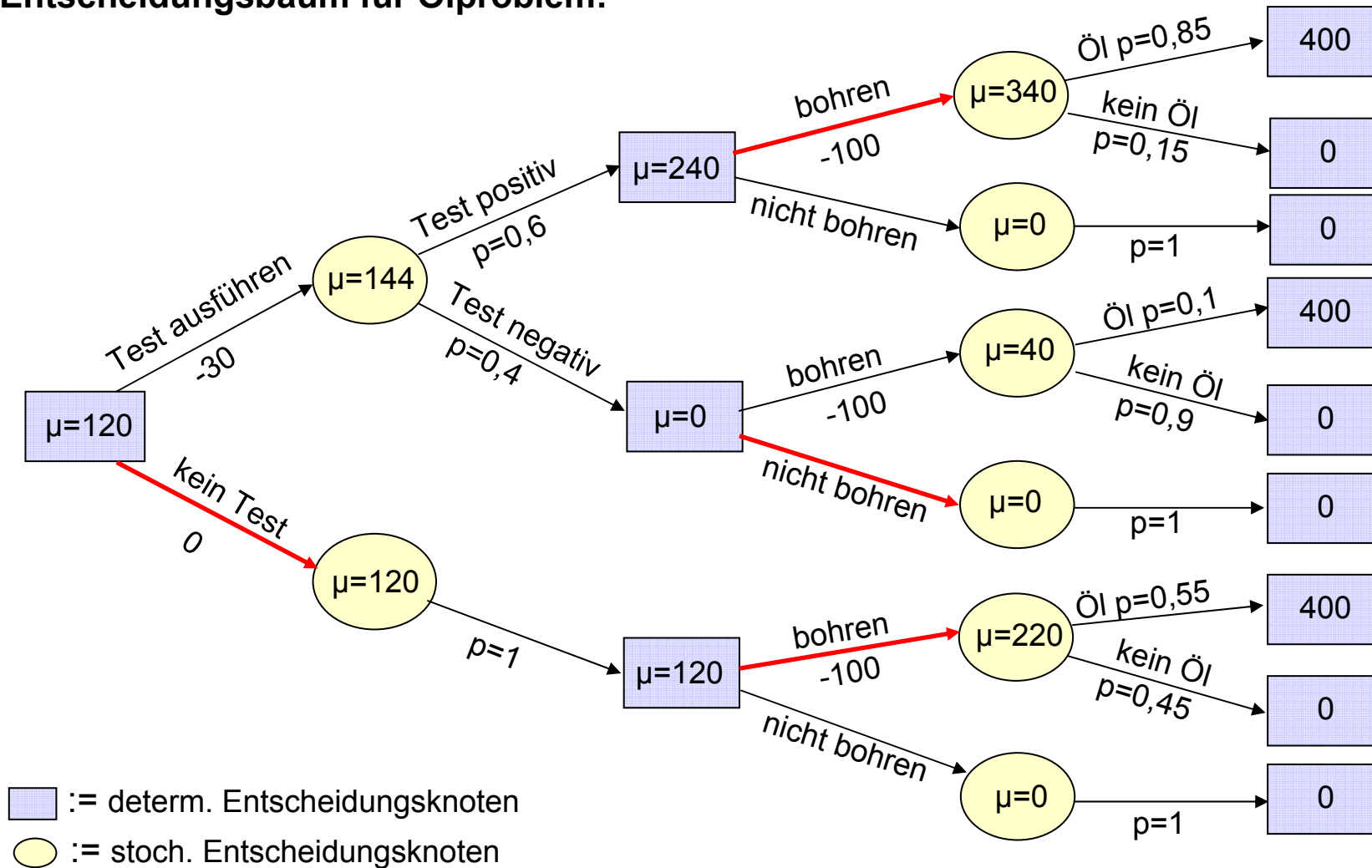
Planungsproblem bei Anwendung des μ -Kriteriums:

Bestimmung einer Entscheidungsfolge bzw. Politik, die zu einem maximalen zu erwartenden Gewinn (= Verkaufserlös - erwartete Kosten) führt.

- Bestimmung der optimalen Entscheidungsfolge mittels *Rückwärtsrechnung* bzw. *Roll Back-Verfahren*, d.h. an jedem stochastischen Knoten ist der Gewinnerwartungswert μ zu berechnen, der sich als Summe der mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten gewichteten Gewinne der jeweiligen Teilpolitiken ergibt.
- Als Entscheidungsknoten ist die Aktion zu wählen, die den *höchsten erwarteten Gewinn* verspricht.

4. Entscheidungstheorie/ 4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

Entscheidungsbaum für Ölproblem:



4. Entscheidungstheorie/ 4.5 Mehrstufige Entscheidungsprobleme

Fazit:

- Verschiedene mögliche Zukunftsentwicklungen lassen sich mit Hilfe von stochastischen Entscheidungsbäumen bei aktuellen Entscheidungen (zum Zeitpunkt $t = 1$) antizipierend einbeziehen.
- Entscheidungen bzw. Entscheidungsfolgen haben in späteren Perioden den Charakter von bedingten Eventualplänen, die beim Eintreten der entsprechenden Umweltentwicklung relevant werden.
→ **flexible Planung**
- Flexible Planung berücksichtigt die Unsicherheit über die zukünftige Entwicklung explizit und mehrwertig ($\neq$ **starre Planung**).