

Lösungsmöglichkeiten bei Ungewissheit

Entscheidungsregeln: ($e_{ij} := \text{Gewinn}$)

1. Maximin-Regel: ($\rightarrow$ risikoscheue Entscheidungshaltung)

Jede Alternative a_i wird mit $\Phi(a_i) := \min\{e_{ij} \mid j = 1, \dots, n\}$ bewertet. Dabei stellt $\Phi(a_i)$ den mit Alternative a_i erzielbaren *Mindestgewinn* dar.

$\Rightarrow$ Als beste Alternative a_{i^*} wird diejenige ausgewählt, für die der „garantierte Mindestgewinn“ maximal ist:

$$\Phi(a_{i^*}) := \max\{\Phi(a_i) \mid i = 1, \dots, m\}$$

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Beispiel:

	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	Maximin
a ₁	1	7	9	3	1
a ₂	6	4	5	4	4
a ₃	6	6	3	7	3
a ₄	4	8	3	5	3

→ **Alternative 2**

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

2. Maximax-Regel: ($\rightarrow$ risikofreudige Entscheidungshaltung)

Jede Alternative a_i wird mit $\Phi(a_i) := \max\{e_{ij} \mid j = 1, \dots, n\}$ bewertet.

$\Phi(a_i)$ ist der mit Alternative a_i erzielbare *Höchstgewinn*.

$\Rightarrow$ Als beste Alternative a_{i^*} wird diejenige ausgewählt, für die gilt:

$$\Phi(a_{i^*}) := \max\{\Phi(a_i) \mid i = 1, \dots, m\}$$

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Fortsetzung Beispiel:

	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	Maximax
a ₁	1	7	9	3	9
a ₂	6	4	5	4	6
a ₃	6	6	3	7	7
a ₄	4	8	3	5	8

→ **Alternative 1**

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

3. Hurwicz-Regel: ($\rightarrow$ Risikobereitschaft steigt mit steigendem λ)

Mit einem vorgegebenen (Optimismus-)Parameter $\lambda \in [0, 1]$ berechnet man $\Phi(a_i) := (\lambda \cdot \max e_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min e_{ij})$.

$\Rightarrow$ Als beste Alternative a_{i^*} wird diejenige ausgewählt, für die gilt:

$$\Phi(a_{i^*}) := \max \{ \Phi(a_i) \mid i = 1, \dots, m \}$$

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Fortsetzung Beispiel:

	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	Minimax	Maximax	Hurwicz $\lambda=0,5$
a ₁	1	7	9	3	1	9	5
a ₂	6	4	5	4	4	6	5
a ₃	6	6	3	7	3	7	5
a ₄	4	8	3	5	3	8	5,5

→ **Alternative 4**

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

4. Laplace-Regel:

Jede Alternative a_i wird mit $\Phi(a_i) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{ij}$ oder mit $\Phi(a_i) := \sum_{j=1}^n e_{ij}$ bewertet.

⇒ Als beste Alternative a_{i^*} wird diejenige ausgewählt, für die der (durchschnittliche) Gewinn am größten ist:

$$\Phi(a_{i^*}) := \max \{ \Phi(a_i) \mid i = 1, \dots, m \}$$

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Fortsetzung Beispiel:

	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	Laplace ($\sum_{j=1}^n e_{ij}$)
a ₁	1	7	9	3	20
a ₂	6	4	5	4	19
a ₃	6	6	3	7	22
a ₄	4	8	3	5	20

→ **Alternative 3**

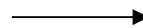
4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

5. Regret- oder Savage-Niehans-Regel:

Anhand der Ergebnis- bzw. Entscheidungsmatrix wird eine Opportunitätskosten- oder **Regretmatrix** $R=(r_{ij})$ mit $r_{ij} = \max \{ e_{hj} \mid h = 1, \dots, m \} - e_{ij}$ gebildet:

	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄
a ₁	1	7	9	3
a ₂	6	4	5	4
a ₃	6	6	3	7
a ₄	4	8	3	5

Ergebnismatrix



	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄
a ₁	5	1	0	4
a ₂	0	4	4	3
a ₃	0	2	6	0
a ₄	2	0	6	2

Regretmatrix

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

⇒ Zur Bewertung von Alternativen a_i dient der *größte Regret*

$$\Phi(a_i) := \max \{r_{ij} \mid j = 1, \dots, n\}.$$

⇒ Als beste Alternative a_{i^*} wird diejenige ausgewählt, für die gilt:

$$\Phi(a_{i^*}) := \min \{ \Phi(a_i) \mid i = 1, \dots, m \}$$

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Fortsetzung Beispiel:

	s_1	s_2	s_3	s_4	$\Phi(a_i)$
a_1	5	1	0	4	5
a_2	0	4	4	3	4
a_3	0	2	6	0	6
a_4	2	0	6	2	6

→ **Alternative 2**

Entscheidung bei Unsicherheit und mehreren Zielen

Zielerreichungsgrad:

Jede Handlungsalternative a_i führt hinsichtlich jedes Zieles z_h ($h=1, \dots, k$) zu einem bestimmten Ergebnis e_h^i . Setzt man dieses Ergebnis in Bezug zu einem gewünschten oder bestmöglichen Ergebnis $\bar{e}^h$, so erhält man den *Zielerreichungsgrad* $g_i^h := e_h^i / \bar{e}^h$.

Zielbeziehungen:

Ziele können folgende Arten von Beziehungen zueinander haben:

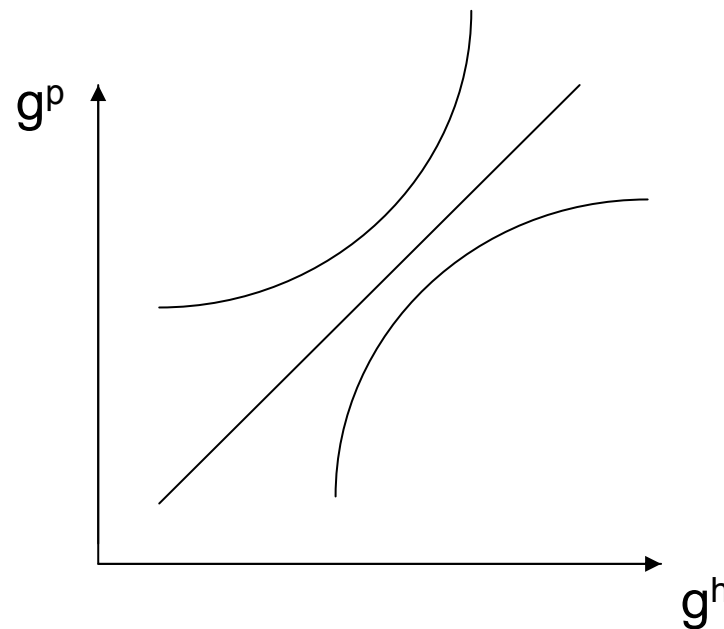
- 1) Komplementär
- 2) Konkurrierend
- 3) Indifferent

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Zu 1) Komplementär:

Mit Verbesserung des Zielerreichungsgrad von z_h verbessert sich auch derjenige von z_p und umgekehrt.

Für $g_i^h > g_q^h$ gilt dann $g_i^p > g_q^p$.

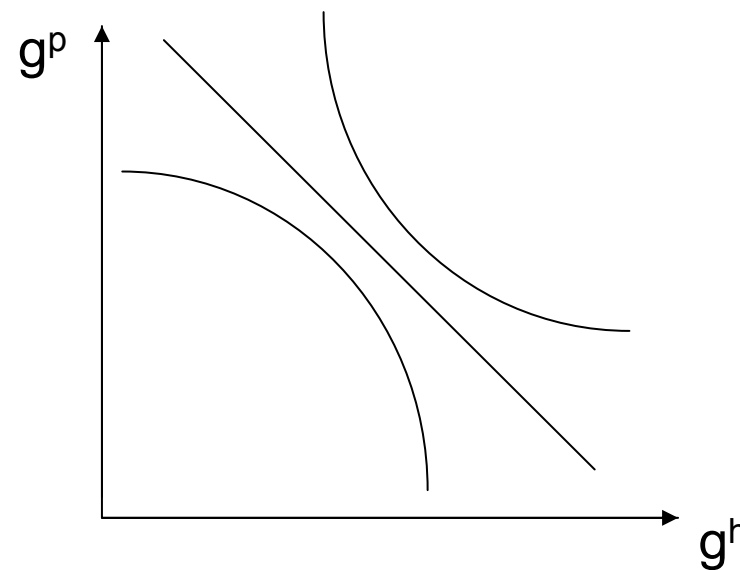


4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Zu 2) Konkurrierend:

Mit Verbesserung des Zielerreichungsgrad von z_h verschlechtert sich derjenige von z_p und umgekehrt.

Für $g_i^h > g_q^h$ gilt dann $g_i^p < g_q^p$.

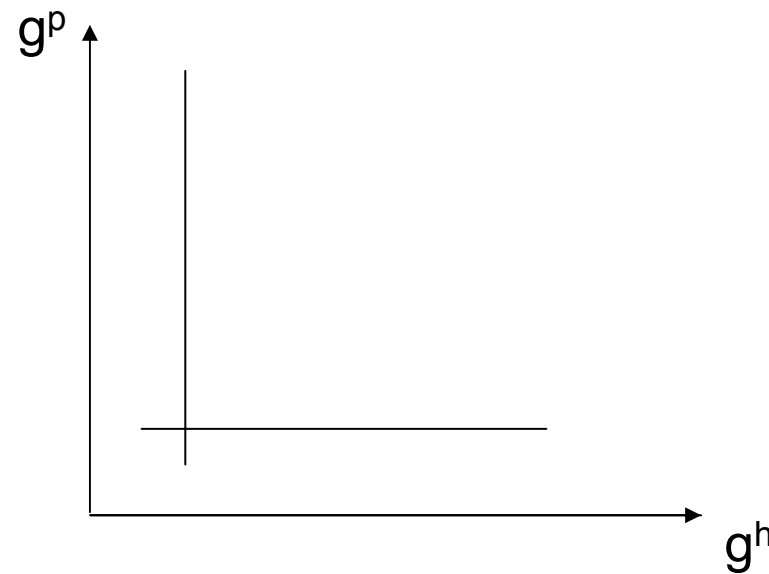


4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Zu 3) Indifferent:

Mit Veränderung des Zielerreichungsgrad von z_h ändert sich derjenige von z_p nicht und umgekehrt.

Für $g_i^h > g_q^h$ gilt dann $g_i^p = g_q^p$.



Zielkonflikte

In Abhängigkeit von den in den Zielen bzw. in den Zielfunktionen eingehenden Variablen sind auch wechselnde Beziehungen denkbar.

→ Zielkonflikte!!!

Beispiele:

- Suche nach einem Hotel unter den Zielsetzungen möglichst ruhige Lage, möglichst zentral und mit niedrigem Preis.
- Das zuvor erläuterte klassische Transportproblem könnte eine zweite Zielsetzung verfolgen, nämlich einen Transportplan zu finden, bei dem die längste benutzte Transportverbindung möglichst kurz ist.
→ Zielkonflikt mit dem Ziel der Gesamtkostenminimierung.

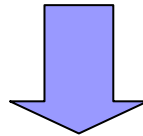
4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Problematik:

Es existiert keine Alternative, die für alle Ziele optimal ist.

Ziel:

Suche nach effizienten Alternativen



Definition:

Im Falle von *Maximierungszielen* bezeichnet man eine Alternative a_i als **effizient**, wenn es keine andere Alternative a_q gibt, die $g_q^h \geq g_i^h$ für alle Ziele $h=1, \dots, k$ sowie $g_q^h > g_i^h$ für mindestens ein h erfüllt.

[vgl. Domschke/Scholl S. 56]

Konzepte zur Lösung von Zielkonflikten:

1) Lexikographische Ordnung

→ Bildung von Zielhierarchien $A \gg B \gg C \dots$

Nach Erstellung der lexikographischen Ordnung wird das Entscheidungsproblem in folgenden Schritten gelöst:

1. Optimierung des Problems ausschließlich bezüglich Ziel A.
Die Menge der optimalen Lösungen (oder Alternativen) sei X_A .
2. Optimierung des Problems ausschließlich bezüglich Ziel B,
wobei nur X_A als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird.
Die Menge der dabei erhaltenen optimalen Lösungen sei X_B .
3. Optimierte das Problem ausschließlich bezüglich Ziel C, wobei nun
nur X_B als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird.

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Beispiel: Gegeben sei eine Ergebnismatrix mit folgender Zielhierarchie:

$$z_2 \gg z_1 \gg z_4 \gg z_3.$$

	z_1	z_2	z_3	z_4
a_1	2	4	10	6
a_2	4	3	16	8
a_3	2	4	10	17
a_4	8	0	0	20
a_5	14	2	12	8

→ **Alternative 3**

2) Zieldominanz

Prinzip:

⇒ Erklärung eines Ziels zum dominierenden *Hauptziel* (→ Zielfunktion)

⇒ Erklärung der übrigen Ziele zu *Nebenzielen* (satisfizierende Ziele)

- maximierende Nebenziele → Unterschranke
- minimierende Nebenziele → Oberschranke

Problem:

Durch ungünstige Schranken für Nebenziele wird unter Umständen der Zielerreichungsgrad des Hauptzieles zu sehr beschnitten, oder die Menge der zulässigen Lösungen ist leer.

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Beispiel:

Gegeben sei folgende Ergebnismatrix, wobei z_2 zum **Hauptziel** deklariert wird, die übrigen werden zu Nebenzielen, mit $e_i^1 \geq 3$ bzw. $e_i^3 \geq 11$ (= untere Schranken) sowie $e_i^4 \leq 15$ (= obere Schranke), wobei z_4 ein zu minimierendes Ziel ist.

	z_1	z_2	z_3	z_4
a_1	2	4	10	6
a_2	4	3	16	8
a_3	2	4	10	17
a_4	8	0	0	20
a_5	14	2	12	8

→ **Alternative 2**

3) Zielgewichtung

Prinzip:

- Gewichtung der Ziele k mit reellen Zahlen (*Zielgewichtung*)
 $\lambda_1, \dots, \lambda_h, \dots, \lambda_k$ mit $0 \leq \lambda_h \leq 1$; wobei gilt: $\sum_{h=1}^k \lambda_h = 1$.
- Bewertung der Alternative a_i mit $\Phi(a_i) = \sum_{h=1}^k \lambda_h \cdot e_i^h$.
- Wähle a_{i^*} mit $\Phi(a_{i^*}) := \max \{\Phi(a_i) \mid i = 1, \dots, m\}$.

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Fortsetzung Beispiel:

Gegeben sei die bereits betrachtete Ergebnismatrix und mögliche Zielgewichtungen λ_h :

	z_1	z_2	z_3	z_4	$\Phi(a_i)$
a_1	2	4	10	6	4,4
a_2	4	3	16	8	5,6
a_3	2	4	10	17	6,6
a_4	8	0	0	20	6,4
a_5	14	2	12	8	7,8
λ_h	0,3	0,4	0,1	0,2	

→ **Alternative 5**

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Problem:

Bestimmung von geeigneten Zielgewichten λ_h , wenn die Ergebnisse verschiedener Ziele unterschiedliche Skalierungen aufweisen.

→ Maximierung der gewichteten Summen der Zielerreichungsgrade, d.h.

$$\max \quad \Phi(a_i) = \sum_{h=1}^k \lambda_h \cdot g_i^h$$

4) Goal-Programmierung

Prinzip:

Unter Vorgabe von gewünschten Ergebnissen $\bar{e}_h$ bezüglich der Ziele $h = 1, \dots, k$ wird die Alternative a_{i^*} gesucht, bei der die Summe $\Psi_1(a_i)$ der absoluten Abweichungen von diesen Vorgaben **minimiert** wird:

$$\Psi_1(a_i) := \sum_{h=1}^k \left| \bar{e}^h - e_i^h \right| \quad (= L_1\text{-Metrik})$$

Allgemein:

$$\Psi_p(a_i) := \sqrt[p]{\sum_{h=1}^k \left| \bar{e}^h - e_i^h \right|^p} \quad (= L_p\text{-Metrik) mit } p \geq 1$$

⇒ Für $p = 2$: Euklidische Entfernungsformel (Luftlinienentfernung)

⇒ Für $p \rightarrow \infty$: $\Psi_\infty(a_i) := \max_h \left\{ \left| \bar{e}^h - e_i^h \right| \right\}$

4. Entscheidungstheorie/ 4.2 Entscheidung bei Unsicherheit

Fortsetzung Beispiel:

	z_1	z_2	z_3	z_4	$\Psi_1(a_i)$	$\Psi_\infty(a_i)$
a_1	2	4	10	6	9	6
a_2	4	3	16	8	10	6
a_3	2	4	10	17	16	9
a_4	8	0	0	20	25	12
a_5	14	2	12	8	9	6
$\bar{e}_h$	8	3	10	8		

→ L_1 -Metrik: Alternative a_1 und a_5

→ L_∞ -Metrik: Alternative a_1, a_2 und a_5

4.4 Nutzentheorie

Bisher:

Der Entscheidungsträger kann zu jeder Alternative a_i und jedem Ziel z_h ein Ergebnis e_i^h quantifizieren, das zur Bewertung von Handlungsalternativen dient.

Problem:

- Nicht alle Ziele lassen sich quantifizieren (z.B. Kundenzufriedenheit).
- Der vom Entscheidungsträger empfundene Nutzenzuwachs, den eine zusätzliche GE an Gewinn hervorruft, ist von der bisherigen Höhe des Gewinns abhängig → die absolute Ergebnishöhe kann nicht unreflektiert als Maß für die Vorteilhaftigkeit einer Alternative herangezogen werden.

⇒ Ergebnisse e_i^h werden in Nutzenwerte $u(e_i^h)$ überführt.
(→ *Nutzen- oder Präferenzfunktionen*)

Nutzenermittlung bei Sicherheit und einem Ziel

→ *Nutzenfunktionen* bilden Präferenzen des Entscheidungsträgers mathematisch ab, indem jedem Ergebnis (Ausprägung) x des betrachteten Ziels (Kriteriums) ein Nutzenwert $u(x)$ zugeordnet wird.

Dabei gilt:

- $u(x) > u(y)$, falls der Entscheidungsträger die Ausprägung x gegenüber der Ausprägung y präferiert (Schreibweise: $x \succ y$).
- $u(x) = u(y)$, falls er zwischen x und y indifferent ist (Schreibweise: $x \sim y$).

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Forderung:

→ Präferenzordnung der Nutzenfunktion ist *vollständig* und *transitiv*.

➤ Axiom der *Vollständigkeit*:

Der Entscheidungsträger besitzt für jedes Paar x und y von Ergebnissen eine Präferenz, d.h. er kann entscheiden, ob $x \succ y$, $x \prec y$ oder $x \sim y$ gilt.

➤ Axiom der *Transitivität*:

Im Falle von $x \succ y$ und $y \succ z$ gilt auch $x \succ z$.

Arten von Nutzenfunktionen

➤ Ordinale Nutzenfunktion:

Die Nutzenfunktion ermöglicht es, die Ergebnisse eines Kriteriums in eine Rangfolge zu bringen.

➤ Kardinale oder messbare Nutzenfunktion:

Die Nutzendifferenz $u(x) - u(y)$ ist ein Maß für die Stärke der Präferenz von x gegenüber y .

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Halbierungs- bzw. Medianmethode:

→ Methode zur Nutzenermittlung bei Sicherheit und einem Ziel

Startwerte: schlechtestes Ergebnis x_0 und bestes Ergebnis x_1 mit $u(x_0) = 0$ und $u(x_1) = 1$.

Schritt 1: Bestimmung des wertmäßigen Mittelpunktes (Medianpunktes) $x_{0,5}$ des Intervalls $[x_0, x_1]$, d.h. der Wert für den gilt: $u(x_{0,5}) = 0,5$ bzw. $(x_0 \rightarrow x_{0,5}) \sim (x_{0,5} \rightarrow x_1)$.

Schritt 2: Bestimmung des wertmäßigen Mittelpunktes $x_{0,25}$ bzw. $x_{0,75}$ durch sukzessive Intervallhalbierung für jedes der beiden Teilintervalle.

Für das Intervall $[x_0, x_{0,5}]$ ist $x_{0,25}$ so zu bestimmen, dass gilt:

$(x_0 \rightarrow x_{0,25}) \sim (x_{0,25} \rightarrow x_{0,5})$. Damit ist $u(x_{0,25}) = 0,25$. Analog: $u(x_{0,75}) = 0,75$.

→ Wiederholung dieser Vorgehensweise bis zur Erzielung der gewünschten Genauigkeit

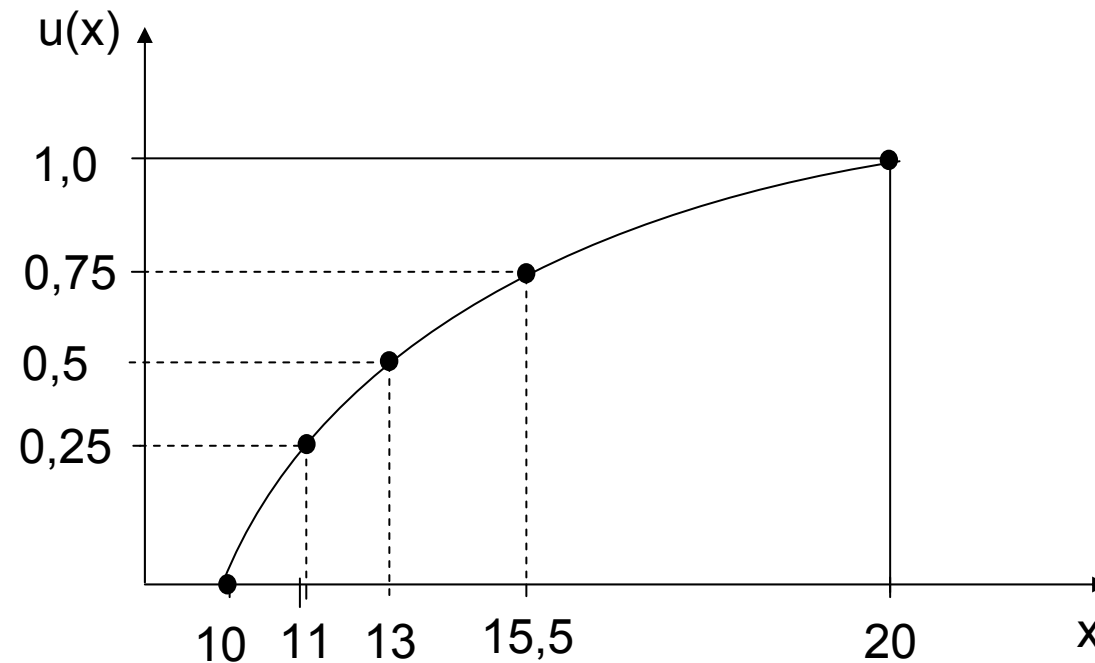
4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

Beispiel: [vgl. Domschke/Scholl S. 60]

Ein Manager will eine Nutzenfunktion für die Dauer seines Urlaubes (in Tagen) aufstellen. Er weiß, dass der Urlaub aufgrund des langen Fluges mindestens 10 Tage dauern sollte. Sein begrenztes Budget erlaubt jedoch keinen Urlaub, der länger als 20 Tage dauert. Grundsätzlich geht er davon aus, dass innerhalb des so gegebenen Intervalls $[x_0, x_1] = [10, 20]$ der Nutzen (Urlaubsvergnügen) mit jedem zusätzlichen Tag steigt. Daher kann er $u(x_0) = 0$ und $u(x_1) = 1$ setzen.

4. Entscheidungstheorie/ 4.4 Nutzentheorie

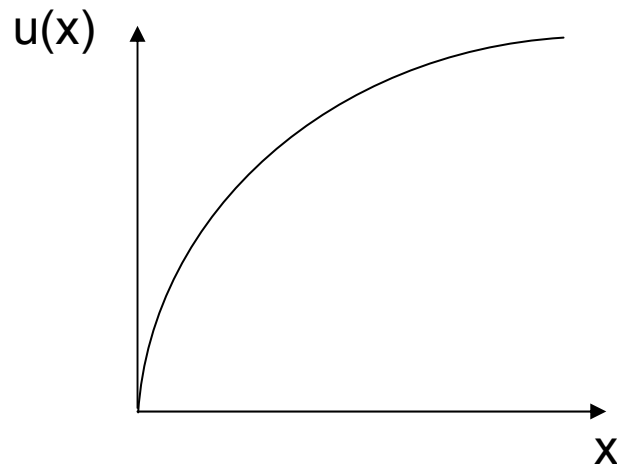
Nutzenfunktion für Karibikurlaub:



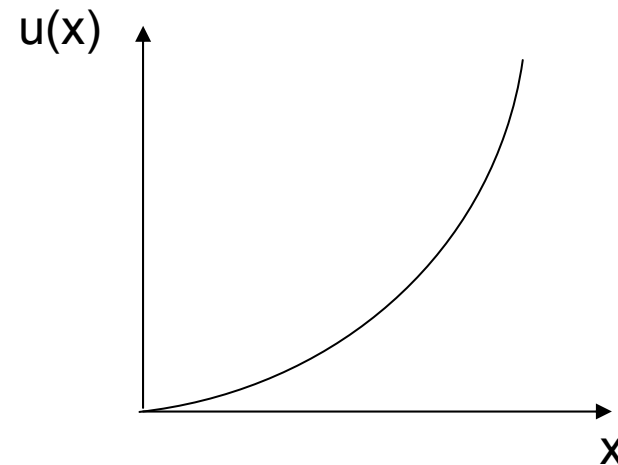
- Nutzenzuwachs bei einer Verlängerung des Urlaubs von 10 auf 13 Tage ist genauso groß, wie bei einer Verlängerung von 13 auf 20 Tage ($u(13) = 0,5$).
- Wertmittelpunkt im Intervall [10,13] bei 11,2 Tagen ($u(11,2) = 0,25$)
- Wertmittelpunkt im Intervall [13,20] bei 15,5 Tagen ($u(15,5) = 0,75$)

Konkave und konvexe Nutzenfunktionen

- *Konkave Nutzenfunktion:* Nutzenzuwachs nimmt bei wachsendem Ergebnis ab (Sättigungseffekt).
- *Konvexe Nutzenfunktion:* Der zusätzlicher Nutzen steigt bei höherem (Ausgangs-)Ergebnis an.



konkave Nutzenfunktion



konvexe Nutzenfunktion