

## Einteilung von Modellen

### 1. nach ihrem Einsatzzweck:

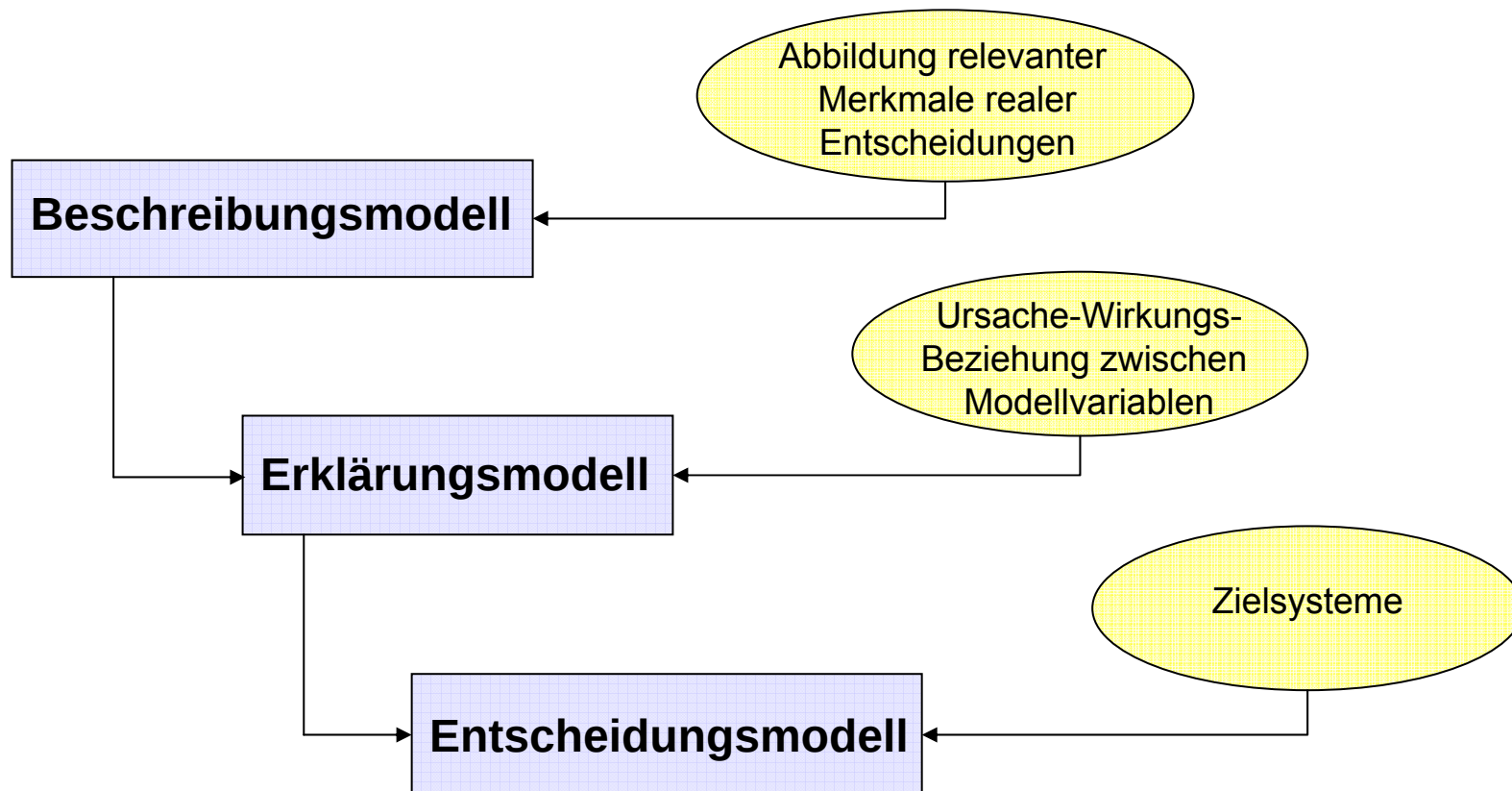
- **Beschreibungsmodelle** dienen nur zur Darstellung der Elemente und deren Beziehungen im realen System, enthalten jedoch keine Hypothesen über reale Wirkungszusammenhänge.
- **Erklärungs- bzw. Kausalmodelle** untersuchen Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge zwischen Parametern und der davon abhängigen Variablen, um das Systemverhalten zu erklären bzw. Hypothesen über sein Verhalten aufzustellen.
- **Prognosemodelle** dienen einerseits der Vorhersage zukünftiger Daten und andererseits der Abschätzung von Auswirkungen möglicher Handlungsalternativen.

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

- **Entscheidungs- bzw. Optimierungsmodelle** beinhalten zusätzlich zu den zu erklärenden Ursache-Wirkungs-Beziehungen Zielrelationen zur Bewertung und Auswahl von Handlungsmöglichkeiten.
- **Simulationsmodelle** sind spezielle Prognosemodelle für komplexe Systeme, bei denen die Ursache-Wirkungs-Beziehungen nicht auf analytischem Weg einfach beschrieben werden können und die häufig stochastischen (zufälligen) Einflüssen unterliegen. Simulationsmodelle sind zwar keine Entscheidungsmodelle i.e.S., jedoch ermöglichen sie es verschiedene Handlungsalternativen im Hinblick auf ihre Zielsetzung zu testen.

## Zusammenhang der Modelle



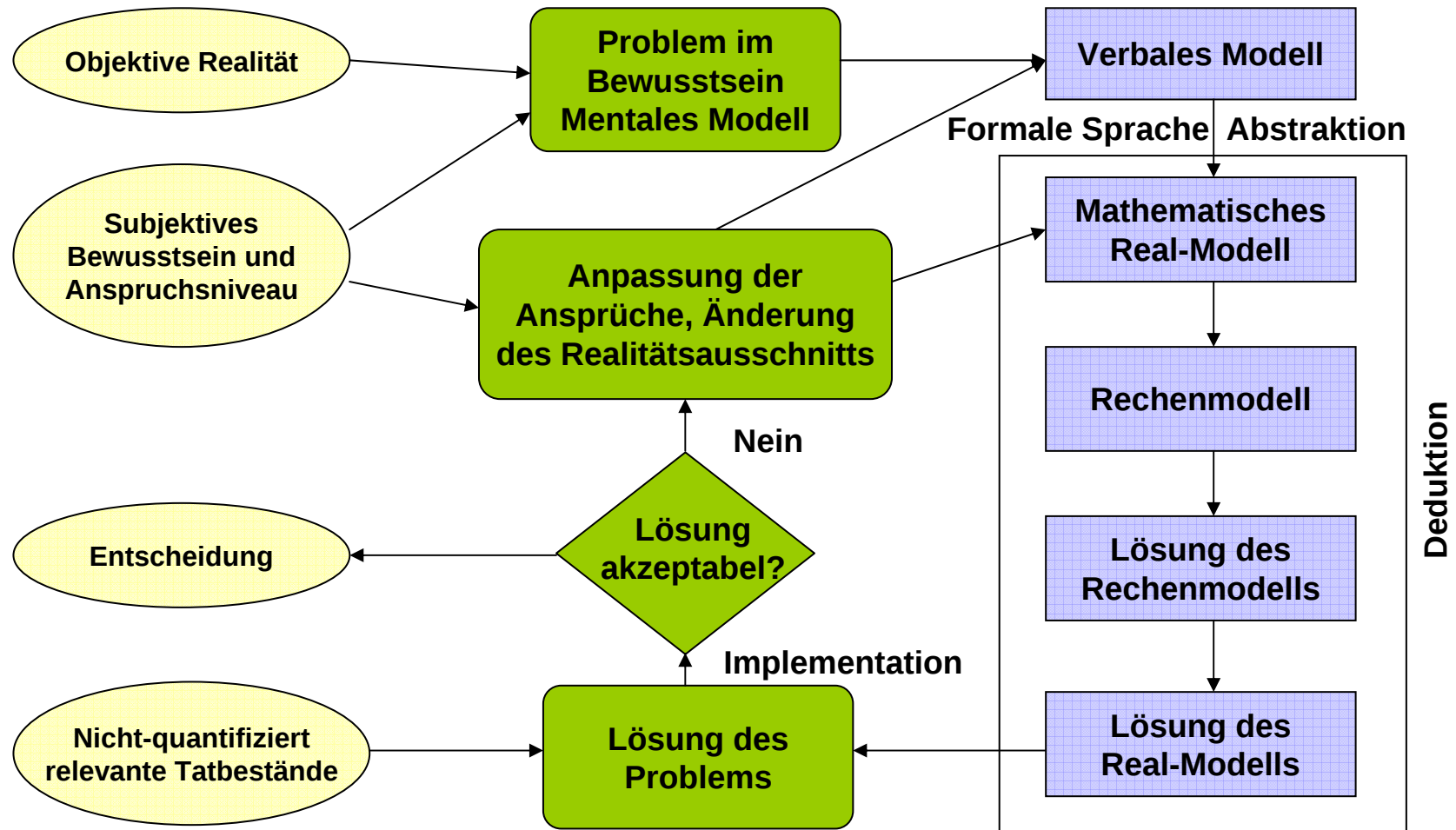
#### 2. nach qualitativen und quantitativen Gesichtspunkten:

- **Quantitative (mathematische) Modelle** beschreiben sämtliche im Modell abgebildeten Aspekte eines realen Entscheidungsproblems durch kardinal messbare (metrische) Informationen. Quantitative Modelle können mit mathematischen Methoden ausgewertet werden, um Lösungen des Entscheidungsproblems zu bestimmen (*Operations Research*).
- **Qualitative Modelle** beinhalten – neben quantitativen Zusammenhänge – verbale Problembeschreibungen anhand qualitativer (d.h. ordinal bzw. nominal messbarer) Informationen.

#### 3. nach der Art der Abstraktion:

- **Deterministische Modelle** gehen davon aus, dass alle zugrunde liegenden Informationen mit Sicherheit (deterministisch) bekannt sind. Wohingegen bei **stochastischen Modellen** die Ausprägungen relevanter Daten unsicher sind und sich lediglich durch Zufallsvariablen abbilden lassen.
- Ein **statisches Modell** erhält man, wenn man von der zeitlichen Entwicklung des realen Systems abstrahiert. Bezieht man den Zeitaspekt jedoch noch in das Modell ein, so liegt ein **dynamisches Modell** vor.
- **Totalmodelle** bilden das reale System in seiner Gesamtheit ab. **Partialmodelle** dagegen beschränken sich auf einen bestimmten Ausschnitt des realen Systems und/oder auf eine gewisse zeitliche Reichweite der Planung.

## Modellbildung und Problemlösung



## Quantitative Entscheidungsmodelle (Optimierungsmodelle)

Optimierungsmodelle bestehen aus

- einer *Menge von Alternativen* (zulässigen Lösungen) und
- mind. einer *Zielfunktion*.

→ eine oder mehrere *optimale Lösungen*

Menge der zulässigen Lösungen kann

- explizit oder
- implizit (in Form von *Restriktionen* bzw. *Nebenbedingungen*)

definiert werden.

→ verschiedene Klassen von *Optimierungsmodellen*

#### Definitionen

- Unter **Modellinstanz** versteht man die konkrete Ausgestaltung eines Modells durch Vorgabe von Werten für alle Parameter.
- Eine **zulässige Lösung** bezeichnet jede Lösung einer Instanz eines Optimierungsmodells, die sämtliche Restriktionen erfüllt.
- Eine zulässige Lösung ist **optimal**, wenn es keine andere Lösung gibt, die hinsichtlich der Zielfunktion(en) besser bewertet ist.

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

#### 1. Deterministische einkriterielle Optimierungsmodelle

Beispiel 1: Produktionsprogrammplanung

| Produkte  | Faktoren<br>[Bedarf/ME] |            |            | DB<br>[GE/ME] |
|-----------|-------------------------|------------|------------|---------------|
|           | Arbeit                  | Maschine 1 | Maschine 2 |               |
| P1        | 1                       | 6          | 0          | 1             |
| P2        | 1                       | 9          | 1          | 2             |
| Kapazität | 100                     | 720        | 60         |               |

**Frage:** Wie viele ME beider Produkte sind herzustellen, so dass die Summe der Deckungsbeiträge (= Preis – variable Kosten) maximiert wird?

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

#### Lineares Optimierungsmodell:

1. Variablendefinition:

$x_1$  := zu fertigende ME von Produkt P1

$x_2$  := zu fertigende ME von Produkt P2

2. Nebenbedingungen:

(1)  $x_1 + x_2 \leq 100$  Kapazitätsrestriktion für Faktor Arbeit

(2)  $6x_1 + 9x_2 \leq 720$  Kapazitätsrestriktion für Faktor Maschine 1

(3)  $x_2 \leq 60$  Kapazitätsrestriktion für Faktor Maschine 2

(4)  $x_1, x_2 \geq 0$  Nichtnegativitätsbedingungen

3. Zielfunktion:

Maximiere  $DB(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

#### Allgemein:

#### Zielfunktion:

Maximiere (bzw. Minimiere)  $F(x)$

Nebenbedingungen:  $g_i(x) \{\leq; \geq; =\} 0$  für  $i = 1, \dots, m$

$x \in W$

#### wobei:

$x$  Variablenvektor (Lösung) mit  $n$  Komponenten;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$F(x)$  Zielfunktion

$g_i(x)$  Funktion zur Beschreibung von Restriktionen

$W$  Wertebereich der Variablen;  $W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n$

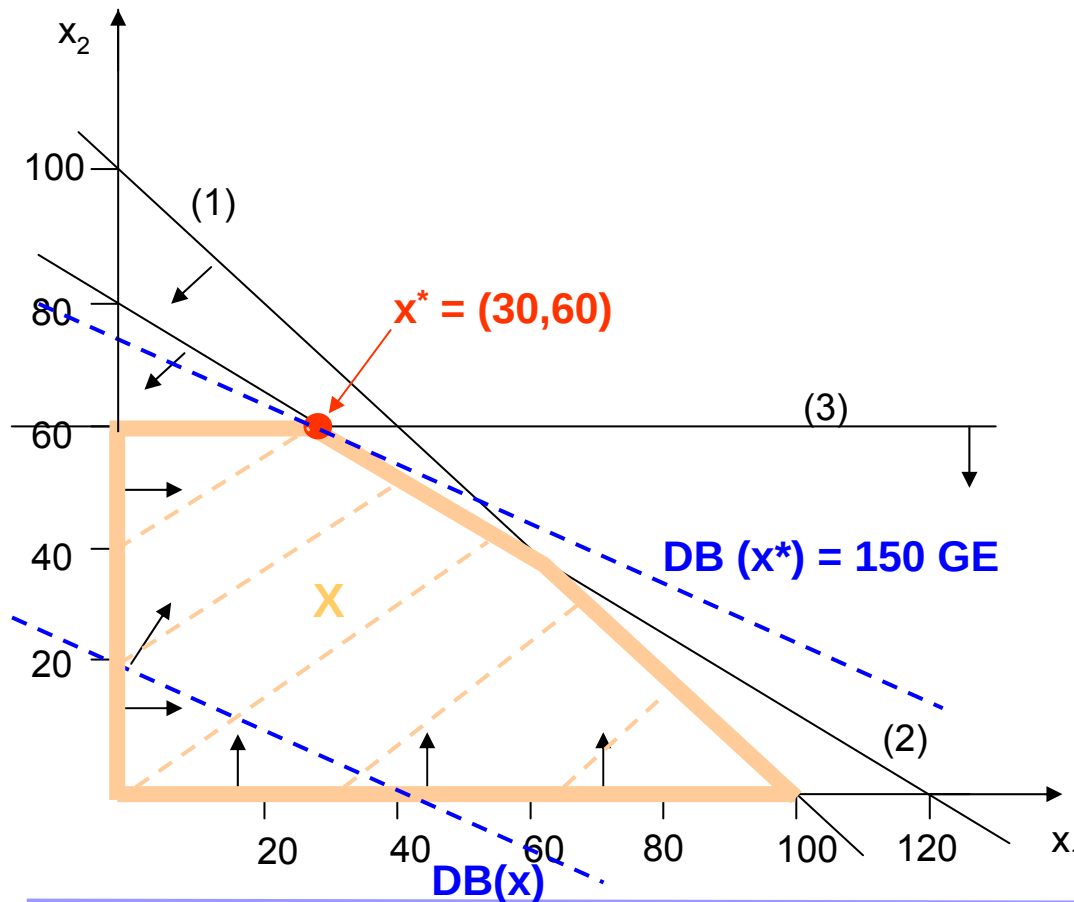
#### Weitere Einteilung deterministischer Optimierungsmodelle

- **Lineares Optimierungsmodell (LP-Modell):**  $F(x)$  und sämtliche  $g_i(x)$  sind lineare Funktionen und die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  nehmen nur (nichtnegative) reelle Zahlenwerte an (d.h.  $W = \mathbb{R}_+^n$ ).
- **Ganzzahliges lineares Optimierungsmodell:** ausschließlich lineare Funktionen werden betrachtet und die Variablen beschränken sich auf ganzzahlige Werte (d.h.  $W = \mathbb{Z}_+^n$ ).
  - *gemischt-ganzzahliges LP-Modell:* nicht alle Variablen sind ganzzahlig
  - *binäres bzw. gemischt-binäres Modell:* alle bzw. einige Variablen nehmen nur die binären Werte 0 oder 1 an.
- **Nichtlineares Optimierungsmodell:** Zielfunktion oder mindestens einer der Restriktionsfunktionen ist nichtlinear.

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

#### Fortsetzung Beispiel 1:

→ grafische Lösung des linearen Optimierungsmodells:



$$\max \quad DB(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$(1) \quad x_1 + x_2 \leq 100$$

$$(2) \quad 6x_1 + 9x_2 \leq 720$$

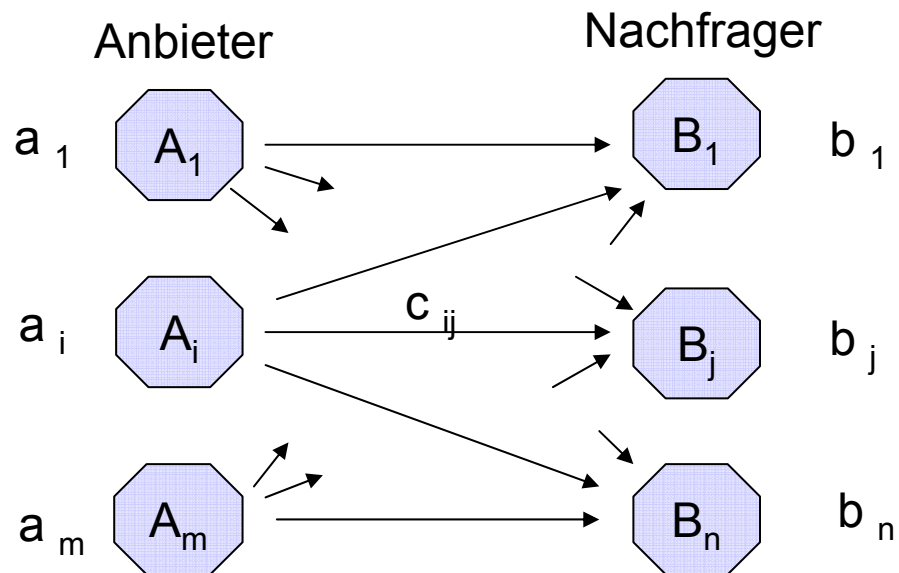
$$(3) \quad x_2 \leq 60$$

$$(4) \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$X$  = Zulässigkeitsbereich

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

#### Beispiel 2: Klassisches Transportproblem



$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

$A_i$  = Angebotsort bzw. Anbieter  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ )

$a_i$  = verfügbare Mengeneinheiten eines bestimmten Gutes

$B_j$  = Nachfrageort bzw. Nachfrager  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ )

$b_j$  = benötigte ME eines bestimmten Gutes

$c_{ij}$  = Kosten für den Transport einer ME von  $A_i$  nach  $B_j$

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

**Lineares Optimierungsmodell zur Bestimmung eines kostenminimalen Transportplans:**

Variablendefinition:

$x_{ij}$  = die von  $A_i$  nach  $B_j$  zu transportierende ME

Lineares Optimierungsmodell:

*Minimiere*  $K(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$

*unter den Nebenbedingungen*

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i \text{ und } j$$

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

#### **Beispiel für ein binäres lineares Optimierungsmodell:**

Das Rucksack- bzw. Knapsack-Problem: [vgl. Domschke S. 38]

„Ein Wanderer kann in seinem Rucksack unterschiedlich nützliche Gegenstände verschiedenen Gewichts mitnehmen. Seine Aufgabe besteht darin, eine Teilmenge der Gegenstände so auszuwählen, dass er bei einzuhaltendem Höchstgewicht des Rucksacks einen maximalen Gesamtnutzen erzielt.“

Dabei gilt:

$n$  = Anzahl der verfügbaren Gegenstände

$u_j$  = Nutzen des Gegenstandes  $j$ ;  $j = 1, \dots, n$

$g_j$  = Gewicht des Gegenstandes  $j$

$G$  = Höchstgewicht des Rucksacks

$x_j = 1$ , falls Gegenstand  $j$  mitgenommen wird; 0 sonst. ( $\rightarrow x_j$  = Binärvariable)

#### **Binäres lineares Optimierungsmodell:**

$$\text{Maximiere } U(x) = \sum_{j=1}^n u_j \cdot x_j$$

*unter den Nebenbedingungen*

$$\sum_{j=1}^n g_j \cdot x_j \leq G$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

Weitere Anwendungsgebiete binärer linearer Optimierungsmodelle:

- Investitionsprogrammplanung bei festem Budget
- Produktionsprogrammplanung bei einem Engpassfaktor
- Auswahl von Werbemedien

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

**Euklidische Metrik** (Luftlinienentfernung) zur Entfernungsmessung:

$$d(i, j) := \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$$

gesucht: optimale Koordinaten  $(x^*, y^*)$  für den Standort, so dass die Kunden kostenminimal beliefert werden können.

→ *nichtlineares Optimierungsmodell*, dass keine eingeschränkten NB aufweist:

$$\text{Minimiere } K(x, y) = c \cdot \sum_{j=1}^n b_j \cdot \sqrt{(x - u_j)^2 + (y - v_j)^2} \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

#### **Beispiel für ein nichtlineares Optimierungsmodell:**

##### Das Steiner-Weber-Problem:

Festlegung eines Standortes für ein Zentrallager derart, dass die Gesamtkosten der Belieferung aller  $n$  Kunden minimal ist.

Dabei soll am zu ermittelnden Standort des Zentrallagers zugleich auch die Produktionsstätte zur Herstellung eines beliebig teilbaren Gutes entstehen.

An den Koordinaten  $(u_j, v_j)$  einer homogenen Fläche (Ebene) befinden sich Kunden  $j = 1, \dots, n$  und weisen *Bedarfe* von  $b_j$  ME des Gutes pro Periode auf.

→ Jeder Punkt der Ebene kommt als Standort für den Betrieb in Frage.

→ Die *Transportkosten*  $c$  [GE/ME bzw. GE/LE] zwischen zwei Punkten

$(u_i, v_i)$  und  $(u_j, v_j)$  der Ebene sind proportional zur Transportmenge und zur zurückzulegenden Entfernung.

## 2. Deterministische multikriterielle Optimierungsmodelle

### Definition:

Ein *multikriterielles Optimierungsmodell* (= *Vektoroptimierungsmodell*) liegt dann vor, wenn mehrere Zielfunktionen bzw. -kriterien simultan zu betrachten sind. Anstelle einer einzelnen Zielfunktion ist dann ein Vektor  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x))$  von Zielfunktionen zu betrachten.

→ Neben *Extremierungsziele* treten auch *Satisfizierungsziele* und *Approximationsziele* auf.

### 3. Stochastische Optimierungsmodelle

**Definition:**

Ein *stochastisches Optimierungsmodell* liegt dann vor, wenn nicht alle dem Modell zugrunde liegenden Daten bekannt und sicher sind.

- An die Stelle eines einzigen, deterministischen Wertes treten bei Unsicherheit über die Modellparameter mehrwertige Informationen.
- Es kann allgemein davon ausgegangen werden, dass mehrere zukünftige Umweltlagen (Szenarien) mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten auftreten können.
- dem stoch. Opt.modell liegen mehrere Modellinstanzen zugrunde.

## Modellgestützte Planung

Reale Entscheidungssituationen weisen insbesondere im Hinblick auf ihre Strukturiertheit unterschiedliche Eigenschaften auf.

### 1. Struktureigenschaften bzw. Strukturdefekte von Entscheidungsproblemen

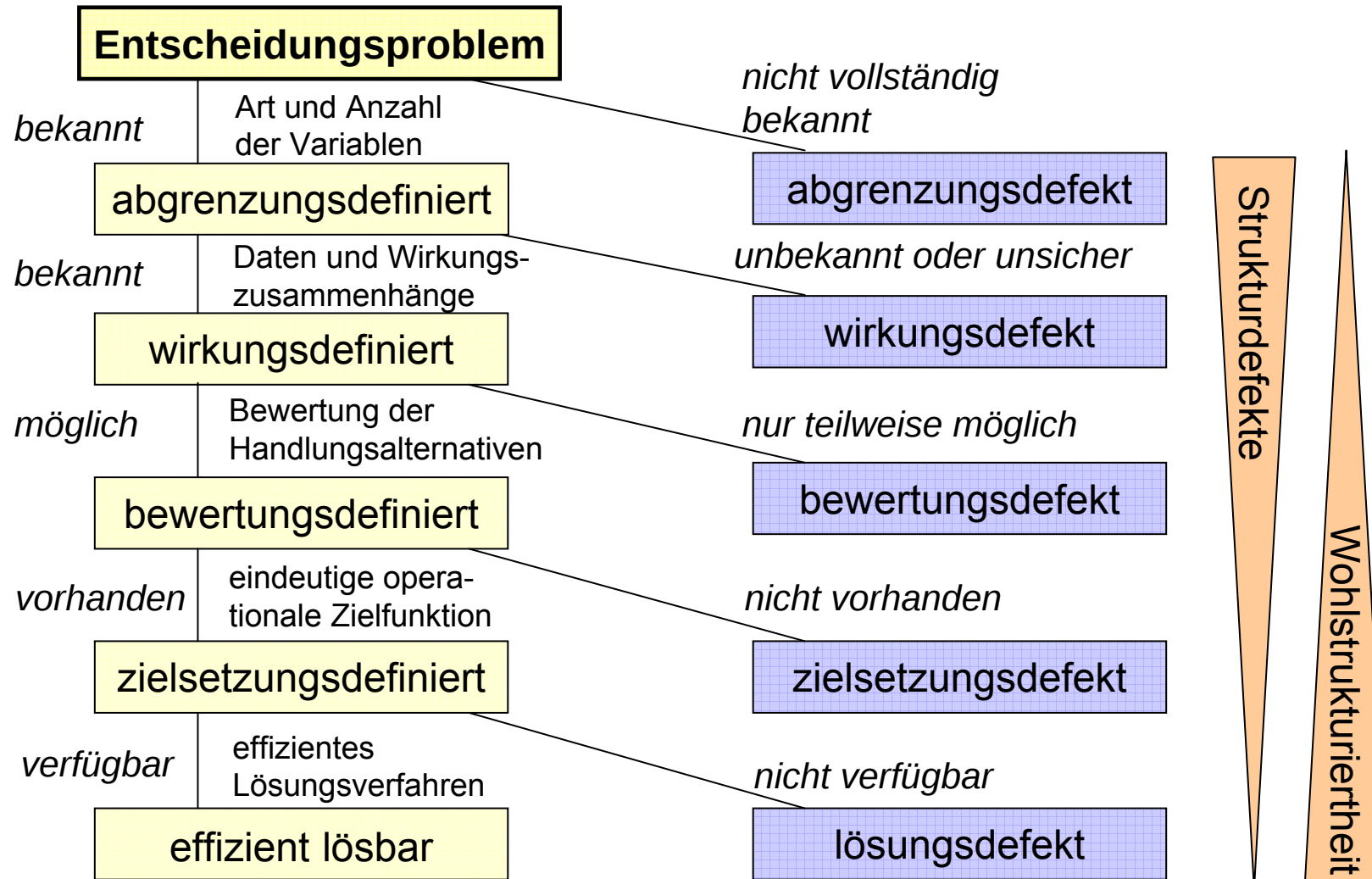
Die Struktur eines Entscheidungsproblems wird beschrieben durch Eigenschaften von

- Daten,
- Variablen,
- Wirkungszusammenhänge und
- Zielsetzungen.

→ verschiedenen Typen von Entscheidungsproblemen, die unterschiedliche Anforderung an die Planung stellen.

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

#### Strukturdefekte von Entscheidungsproblemen



## 2. Planung als modellgestützter Strukturierungsprozess

Entscheidungsträger sind aufgrund von Strukturdefekten nur selten in der Lage, ein reales Entscheidungsproblem unmittelbar und ohne große Verluste der Abbildungsgenauigkeit in ein Modell zu übertragen.

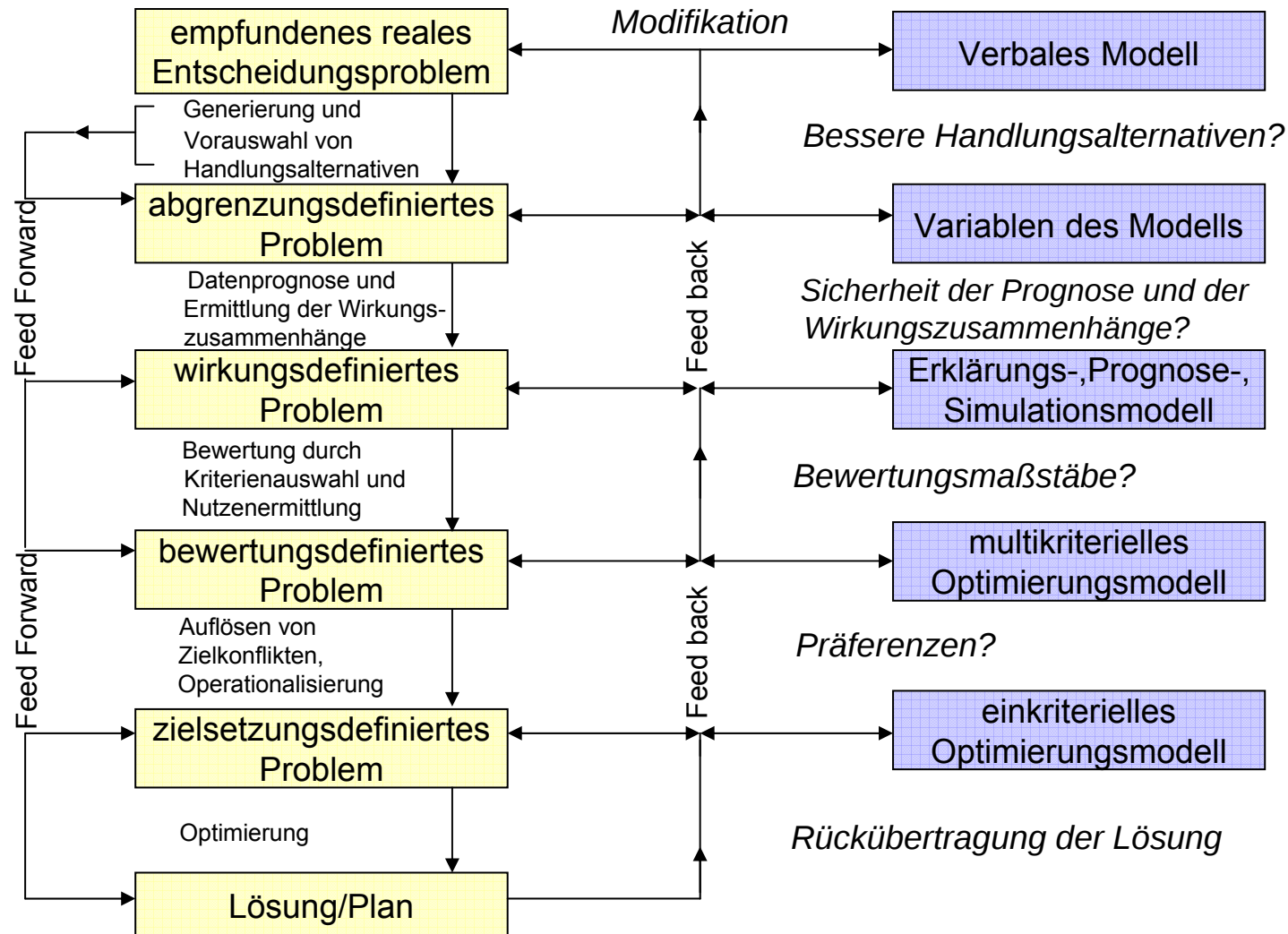
→ *Aufgabe einer systematischen Planung:* Strukturdefekte in einem fortgesetzten Modellierungs- bzw. Abstraktionsprozess zu überwinden.

→ *Problemstrukturierung:*

Schwierigkeiten: Abgrenzungs-, Wirkungs-, Bewertungs- und Zielsetzungsdefekte beeinflussen sich gegenseitig.

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

#### Prozess der Strukturierung



## Planungs- und Entscheidungsmethoden:

Zur Ausführung verschiedener Planungsphasen und Strukturierungsschritte existiert eine Vielzahl von *Planungs-* und *Entscheidungsmethoden*.

Folgende Methodenklassen werden unterschieden:

- **Analysetechniken:** Methoden der System- und Problemanalyse zur Gewinnung von Anregungsinformationen (z.B. Portfolio-Analyse)
- **Kreativitätstechniken:** Methoden zur Generierung und Vorauswahl von Handlungsalternativen in komplexen und neuartigen Problemsituationen (z.B. Brainstorming)

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

- **Argumentations- oder Verhandlungstechniken:** Techniken zur Präsentation von Problemen, Konzepten und Ergebnissen sowie zur Durchführung von Verhandlungen
- **Prognosemethoden:** Methoden zur Erstellung von Entwicklungs- und Wirkungsprognosen
  - *quantitative Ansätze* (z.B. zeitreihenbasierte Methoden)
  - *qualitative Methoden* (z.B. Simulationen)
- **Bewertungstechniken:** Bewertungen von Handlungsalternativen, Auflösen von Zielkonflikten und Operationalisierung von Zielkriterien (z.B. Ansätze der Entscheidungstheorie)

### 3. Planung/ 3.2 Modelle und modellgestützte Planung

---

- **Optimierungsmethoden:** Techniken des Operations Research zur Ermittlung optimaler Lösungen für unterschiedliche Optimierungsmodelle
- **Erhebungstechniken:** Methoden zur Datenerhebung (z.B. Fragebogen-, Interview- oder Stichprobentechniken)
- **Darstellungstechniken:** Darstellung von Problemen, Prozessen, Lösungen usw. mit graphischen Hilfsmitteln (z.B. Netzpläne, Organigramme, Ablaufpläne)