

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Grundlagen der Optimierung (Operations Research)

- **Grundlage der Optimierung:**
Formulierung eines *Entscheidungs-* bzw. *Optimierungsmodells*

- **Lösung von komplexen Entscheidungsproblemen:**
Modellgestützte Optimierungsmethoden (→ Operations Research)

- **Ermittlung optimaler und zulässiger Lösungen:**
Mathematischer Optimierungsmethoden bzw. -verfahren.

Optimierungsverfahren

- **Exakte Verfahren** gelangen für jede denkbare Instanz eines Modells in einer endlichen Anzahl von Schritten garantiert zu einer *optimalen Lösung*.
- **Heuristische Verfahren (Heuristiken)** bieten keine Garantie dafür, eine optimale Lösung zu finden und liefern daher meist *suboptimale Lösungen*.

Gliederung nach Modelltypen

- ➡ Lineare Optimierung
- ➡ Ganzzahlig lineare (bzw. kombinatorische) Optimierung
- ➡ Nichtlineare Optimierung

Lineare Optimierung bzw. lineare Programmierung

Allgemeines Modell und Simplex-Algorithmus:

Ein *lineares Optimierungsmodell (LP-Modell)* besteht im einfachsten Fall aus einer zu maximierenden linearen Zielfunktion und einer Menge linearer Nebenbedingungen.

Formulierung eines LP-Modells:

- Lösungsvektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$
- Vektor der Zielfunktionskoeffizienten $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$
- $(m \times n)$ -Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$
- Vektor der rechten Seiten $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Normalform eines LP-Modells:

Maximiere

$$F(x) = c^T x$$

unter den Nebenbedingungen

$$Ax = b, \quad x \geq 0$$

Liegt ein Modell nicht in Normalform vor, so lässt es sich

- durch *Einführen* von zusätzlichen *Schlupfvariablen* x_j mit $c_j = 0$ oder
- durch *Ersetzung* vorzeichenunbeschränkter *Variablen* durch zwei nicht negative Variablen

in die Normalform überführen.

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Modell in *kanonischer Form*:

Eigenschaften:

- $n > m, \quad b \geq 0$
- $c_{n-m+1} = \dots = c_n = 0$
- $A = A [A' \mid I]$ mit einer $(m \times n - m)$ -Matrix A' und einer $(m \times m)$ -Einheitsmatrix I

Der Simplex-Algorithmus

Ausgehend von der kanonischen Form lässt sich das LP-Modell mit Hilfe des von *Dantzig* entwickelten (primalen) **Simplex-Algorithmus** optimal lösen:

- Die durch die linearen Nebenbedingungen definierte Lösungsmenge ist ein *konvexes Polyeder*, wobei mindestens eine optimale Lösung in einem Eckpunkt (Schnittpunkt von Nebenbedingungen) dieses Polyeders liegt .
- Der *Simplex-Algorithmus* startet in einem solchen Eckpunkt und geht in jeder Iteration zu einem benachbarten Eckpunkt über, falls dieser einen höheren Zielfunktionswert aufweist.
Gibt es einen solchen benachbarten Eckpunkt nicht, so ist eine **optimale Lösung** erreicht.

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Zulässige Basislösung:

Das Modell hat in jedem Eckpunkt kanonische Form, d.h. $Ax = b$ ist nach m (Basis-)Variablen aufgelöst.

- **Basisvariablen** können einen positiven Wert aufweisen.
- **Nichtbasisvariablen** besitzen den Wert 0.

Durch Austausch einer Basisvariablen gegen eine Nichtbasisvariable erfolgt der Übergang von einem Eckpunkt zu einem benachbarten, d.h. durch eine entsprechende Transformation des Gleichungssystems, so dass der Zielfunktionswert möglichst stark ansteigt.

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Beispiel:

$$\text{Max} \quad \text{DB}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 \leq 100$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 720$$

$$x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kanonischer Form: → Einführung von Schlupfvariablen x_3 bis x_5

$$\text{Max} \quad \text{DB}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{u.d.N} \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 100$$

$$6x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 720$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

→ eine erste **zulässige** Basislösung: $x = (0, 0, 100, 720, 60)$
mit den Basisvariablen x_3 , x_4 und x_5 und dem Zielfunktionswert
 $DB(x) = 0$ GE

z.B.:

Erste Iteration:

Ersetzung der Basisvariable x_5 durch die derzeitige Nichtbasisvariable x_2

→ neue Basislösung $x = (0, 60, 40, 180, 0)$ mit $DB(x) = 120$ GE

Zweite Iteration:

Ersetzung der Basisvariable x_4 durch die Nichtbasisvariable x_1

→ optimale Basislösung $x^* = (30, 60, 10, 0, 0)$ mit $DB(x^*) = 150$ GE

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

- Liegt das Modell zu Beginn nicht in kanonischer Form (keine bekannte zulässige Basislösung) vor, so sind vor Anwendung des *primalen Simplex-Algorithmus* geeignete Transformationsschritte auszuführen.
- Der **Simplex-Algorithmus** wird mit Hilfe eines Tableaus durchgeführt, das neben dem Gleichungssystem $Ax = b$ auch eine Gleichung für die Zielfunktion und eine Variable für den Zielfunktionswert enthält.

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Netzplantechnik(NPT)

- Planung und Steuerung von (Groß-)Aufträgen und Projekten sowie zeitliche Planung miteinander zusammenhängender Vorgänge
- Hilfsmittel der Durchlaufterminierung sowie bei Einzelfertigung im
 - Anlagenbau (z.B. Bau eines Kraftwerks oder einer Lagerhalle)
 - Forschung und Entwicklung (z.B. Konstruktion eines neuen Großraumflugzeuges)
 - Organisation von Großprojekten und -veranstaltungen (z.B. Olympiade)

Wichtige Methoden der Netzplantechnik

- ➔ CPM (Critical Path Method), USA, 1956
- ➔ PERT (Program Evaluation and Review Technique), USA, 1956; eingesetzt zur Entwicklung der Polaris-Rakete
- ➔ MPM (Metra Potential Method), Frankreich, 1957

Bestandteile eines Netzplans:

- **Vorgang:** ein zeiterforderndes Geschehen (z.B. Fertigungs-, Transport-, Prüfvorgang) mit definiertem Anfang und Ende.
- **Ereignis:** ein Zeitpunkt, der das Eintreten eines bestimmten Projektzustandes markiert.
- **Vorrang- bzw. Reihenfolgebeziehungen:** Aufgrund technologischer oder wirtschaftlicher Restriktionen können bestimmte Vorgänge erst dann ausgeführt werden, wenn andere abgeschlossen sind.

Der Netzplan

Definition

Ein **Netzplan** entspricht im einfachsten Fall einem zyklensfreien, gerichteten Graphen mit Knoten und Pfeilen sowie Knoten- und/oder Pfeilbewertungen.

Arten von Netzplänen:

- *Vorgangsknotennetzplan (MPM)*
- *Vorgangspfeilnetzplan (CPM)*

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Vorgangspfeil- und Vorgangsknotennetzpläne am Beispiel des Backens von Spargelpfannkuchen: [vgl. Domschke/Scholl S. 122]

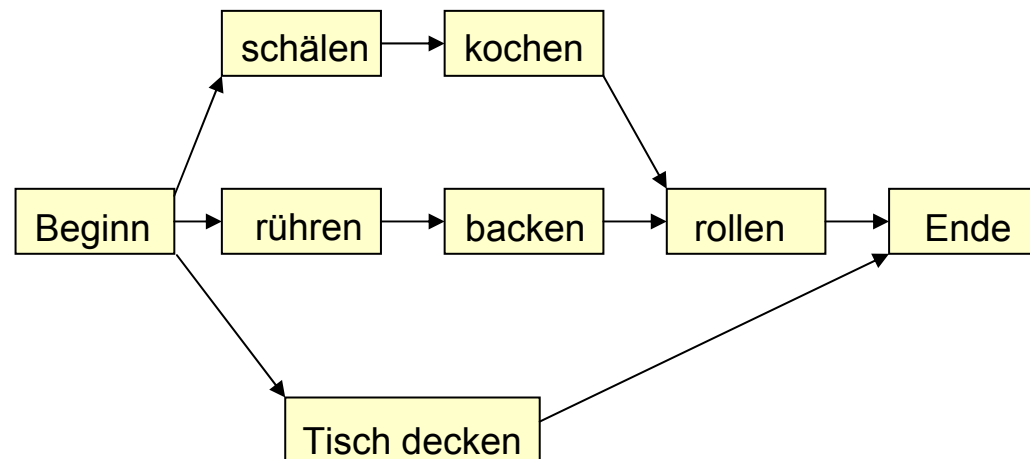
Arbeitsvorgänge:

- Spargel *schälen*
- Spargel *kochen*
- Pfannkuchenteig *rühren*
- Pfannkuchen *backen*
- Spargel und Schinken in Pfannkuchen *einrollen*
- Tisch *decken*

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

➤ **Vorgangsknotennetzplan (MPM):**

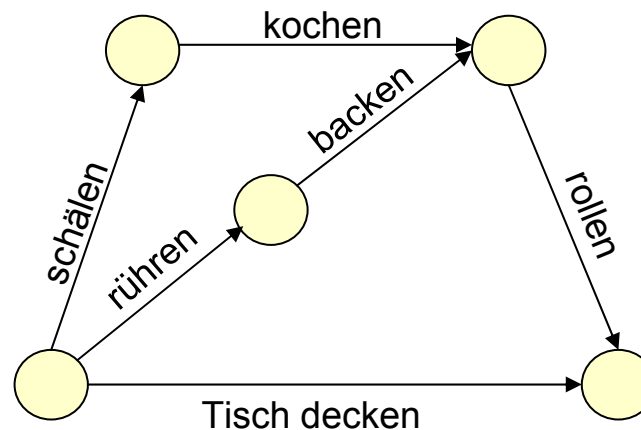
- Vorgänge werden als Knoten des Graphen abgebildet.
- Vorgangsdauern dienen als Knotenbewertungen.
- Ereignisse werden nicht explizit im Graphen repräsentiert; sie ergeben sich bei Beginn o. Abschluss eines oder mehrerer Vorgänge.
- Pfeile des Graphen repräsentieren die Reihenfolgebeziehungen.



4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

➤ Vorgangspfeilnetzplan (CPM):

- Darstellung der Vorgänge als Pfeile
- Knoten repräsentieren die Ergebnisse
- Vorrangbeziehungen werden abgebildet



4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Strukturplanung:

- Identifizierung der zu berücksichtigenden Vorgänge (Aktivitäten)
 $i = 1, \dots, n$ und deren Dauern t_i sowie Vorrangbeziehungen.
- Verwendung von *Vorgangslisten* zur übersichtlichen Darstellung der Daten
- Angabe der Menge V_i von Vorgängern im Graphen für jeden Vorgang zur *Beschreibung der Reihenfolgebeziehungen*
- Schwierigkeit: Wahl des „*richtigen*“ Detaillierungsgrades

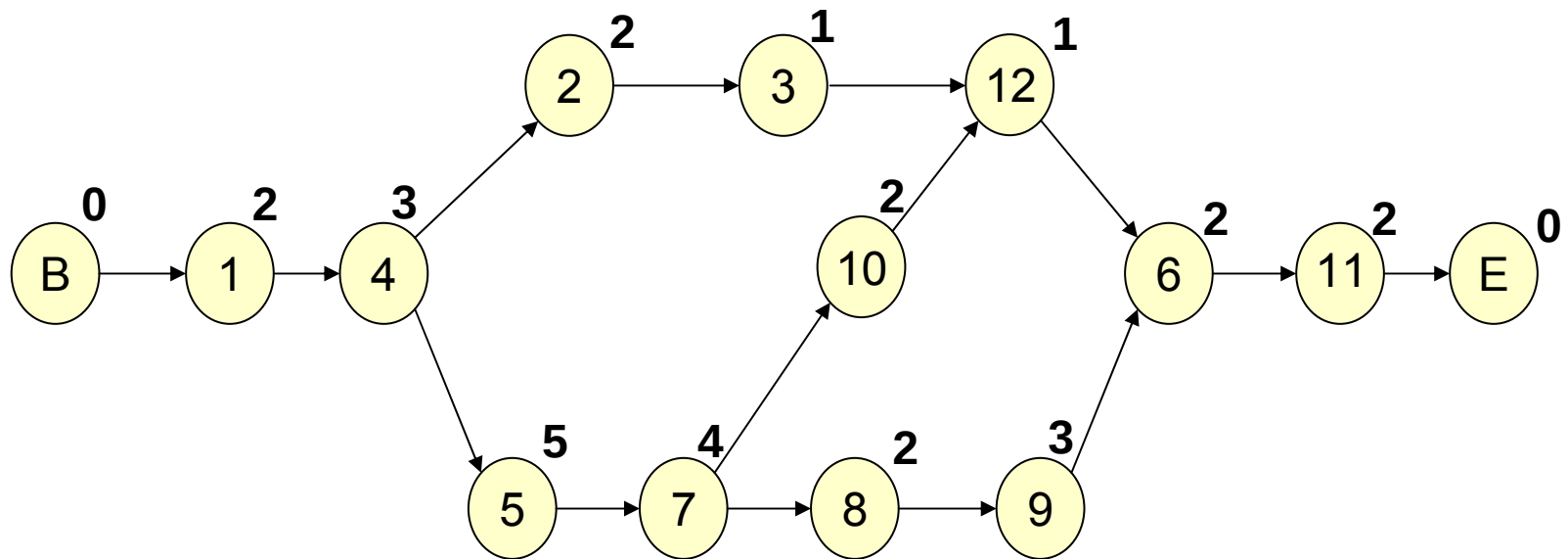
4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Beispiel: Vorgangsliste für den Bau einer Werkstatt

Vorgang i	Vorgangsbeschreibung	V_i	t_i
1	Ausheben und Ausschalen der Fundamente	{ }	2
2	Verlegen der Abwasserrohre	{4}	2
3	Verlegen elektrischer Erdleitungen	{2}	1
4	Gießen der Bodenplatte	{1}	3
5	Errichten der Mauern	{4}	5
6	Anbringen des Innen- und Außenputzes	{9,12}	2
7	Einschalen und Betonieren der Decke	{5}	4
8	Einsetzen der Türen und Fenster	{7}	2
9	Errichtung und Deckung des Daches	{8}	3
10	Installieren elektrischer Leitungen	{7}	2
11	Aufstellen der Maschinen	{6}	2
12	Setzen von Steckdosen und Schaltern	{3,10}	1

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Vorgangsknotennetzplan für den Werkstattbau:



4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

→ Zwischen Vorgängen können *Minimal*- und *Maximalabstände* bestehen!

- **Minimalabstand** d_{ij} : Verstreichung einer Zeitspanne von mindestens d_{ij} ZE nach dem Ende eines Vorganges, vor dem Beginn des Vorganges j;
im Beispiel: ein *Mindestabstand* zwischen 5 und 7, da die Mauern eine gewisse Festigkeit benötigen, bevor die Decke gegossen werden kann.
- **Maximalabstand** $\bar{d}_{ij}$: Verstreichung von höchstens $\bar{d}_{ij}$ ZE nach Abschluss von Vorgang i vor dem Beginn des Vorganges j;
z.B.: in der chemischen Industrie oder bei der Verarbeitung von Metallen in geschmolzenem Zustand.

Zeitplanung

→ Entwerfung eines *Terminplans* für den betrachteten Netzplan

- Ermittlung der kürzestmöglichen Projektdauer und der frühest- und spätestmöglichen Startzeitpunkte der einzelnen Vorgänge
- Bestimmung des zeitlichen Puffers für die Ausführung der einzelnen Vorgänge

Annahme:

Beginnvorgang B und Endvorgang E mit $t_B = 0$ und $t_E = 0$

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Weitere Bezeichnungen:

- V_i : Menge der (direkten) Vorgänger von Vorgang (Knoten) $i = 1, \dots, n$
- N_i : Menge der (direkten) Nachfolger von Vorgang i
- T : kürzeste Projektdauer
- FA_i, FE_i : frühestmöglicher Anfangs- bzw. Endzeitpunkt von Vorgang i
- SA_i, SE_i : spätestmöglicher Anfangs- bzw. Endzeitpunkt von Vorgang i
- $FA_B = FA_B = 0$: Projektbeginn

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Früheste bzw. späteste Anfangs- u. Endzeitpunkte

- Ermittlung frühester Anfangs- u. Endzeitpunkte: **Vorwärtsrechnung**
(dazu: Betrachtung der *topologischen Sortierreihenfolge*)

$$FA_i := \max \{FE_h \mid h \in V_i\}, \quad FE_i := FA_i + t_i$$

→ kürzestmögliche Projektdauer $T := FE_E$

- Ermittlung spätester Anfangs- u. Endzeitpunkte: **Rückwärtsrechnung**
(dazu: Betrachtung der Vorgänge in *umgekehrter Sortierreihenfolge*)

$$SE_i := \min \{SA_j \mid j \in N_i\}, \quad SA_i := SE_i - t_i$$

Pufferzeiten

- **Gesamte Pufferzeit** eines Vorganges i GP_i mit $GP_i := SA_i - FA_i$:
maximale Zeitspanne, um die ein Vorgang i verschoben und/oder verlängert werden kann, ohne dass sich die Projektdauer erhöht.
→ alle Vorgänge mit $GP_i = 0$ sind *kritisch*, da ihre Verlängerung oder zeitliche Verschiebung unweigerlich zu einer Verlängerung des gesamten Projektes führt.
- **Freie Pufferzeit** eines Vorganges i FP_i mit $FP_i := \min \{FA_j \mid j \in N_i\} - FE_i$:
zeitlicher Spielraum, der für Vorgang i verbleibt, wenn alle Nachfolger von i frühestmöglich beginnen.

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

➤ **Unabhängige Pufferzeit** von Vorgang i UP_i mit

$$UP_i := \max \{0, \min \{FA_j \mid j \in N_i\} - \max \{SE_h \mid h \in V_i\} - t_i\}:$$

zeitlicher Spielraum, der für Vorgang i verbleibt, wenn alle Nachfolger von i frühestmöglich und alle Vorgänger von i spätestmöglich beginnen.

Allgemein gilt:

- $GP_i \geq FP_i \geq UP_i, \forall i$
- alle Pufferzeiten für kritische Vorgänge sind gleich 0.

Kritischer Weg

Definition:

Ein **kritischer Weg** ist eine Folge von kritischen Vorgängen im Netzplan, der mit dem Startknoten B beginnt und im Endknoten E endet. Er ist zugleich ein *längster Weg*, wenn man die Vorgangsdauern als Entfernungen interpretiert. Seine Länge entspricht der kürzesten Projektdauer T .

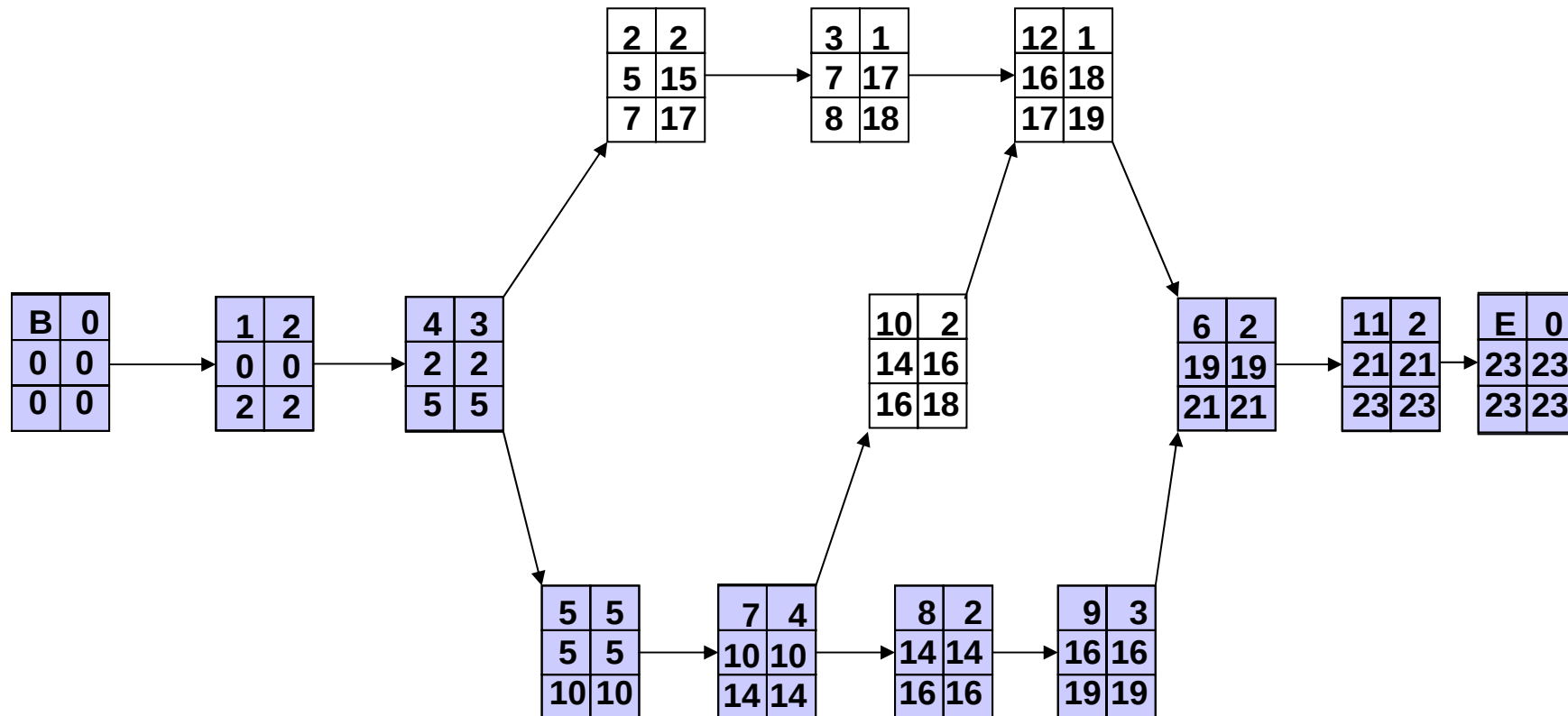
Anmerkung:

- Ein Netzplan kann mehrere kritische Wege enthalten.
- Falls sich einer der Vorgänge auf einem kritischen Weg verlängert oder verzögert, so verlängert sich die gesamte Projektdauer entsprechend.

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Beispiel: Zeitplanung für Werkstattbau

i	t _i
FA _i	SA _i
FE _i	SE _i



4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

- mögliche topologische Reihenfolge: B,1,4,2,5,3,7,8,9,10,12,6,11,E
- (einziger) kritischer Weg: 1,4,5,7,8,9,6 und 11
- kürzeste Projektdauer: $T = 23$
- Pufferzeiten der kritischen Vorgänge: 0
- Pufferzeiten für nichtkritische Vorgänge:

i	GP _i	FP _i	UP _i
2	10	0	0
3	10	8	0
10	2	0	0
12	2	2	0

Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung

→ Entstehung der Lösungen durch Kombinieren und Reihen von Lösungselementen

Kombinatorische Optimierungsprobleme lassen sich untergliedern in:

- *Reihenfolgeprobleme* (z.B. Maschinenbelegungsprobleme, Rundreiseprobleme)
- *Gruppierungsprobleme* (z.B. Fließbandabstimmung, Losgrößenplanung, Tourenplanung)
- *Zuordnungsprobleme* (z.B. Personaleinsatzplanung)
- *Auswahlprobleme* (z.B. Knapsack-Problem)

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

- Ganzzahlige lineare Optimierungsmodelle unterscheiden sich von LP-Modellen dadurch, dass für einige oder alle Variablen nur ganzzahlige Werte zulässig sind.
- Bei Beschränkung ganzzahliger Variablen auf die Werte 0 und 1 spricht man von *Binärvariablen* (→ (gemischt-) binäre LP-Modelle).
- Aufgrund der exponentiell wachsenden Anzahl von Lösungen gibt es i.d.R. *keine* effizienten Lösungsverfahren.

Effizienz

Definition:

Ein Verfahren ist im Sinne der Komplexitätstheorie **effizient**, wenn seine Rechenzeit bzw. sein Rechenaufwand durch ein von der Problemgröße (z.B. Anzahl der Kunden oder Produkte) abhängiges Polynom nach oben beschränkt wird.

- Bei **nichteffizienten** Verfahren wächst die Rechenzeit ebenso wie der Lösungsraum mit zunehmender Problemgröße exponentiell.
- Probleme, für die ein effizientes Lösungsverfahren bekannt ist, werden als **polynomial lösbar** und solche, für die dies nicht der Fall ist, als **NP-schwer** bezeichnet.

4. Entscheidungstheorie/ Operations Research

Zur Lösung *NP-schwerer Optimierungsprobleme* verwendet man:

 **exakte Verfahren**

 **heuristische Verfahren**

Für *polynomial lösbare Probleme* verwendet man:

 **exakte Verfahren**