

2. Übungsblatt zum Teil Planung

Aufgabe 1: Lineare Programmierung

Ein Unternehmen stellt „Intelligenzsaft“ und „Krafttrunk“ mit variablen Kosten von 8 EUR/l bzw. 4 EUR/l her. Die beiden Produkte werden durch einen Destillationsprozess gewonnen, der täglich nur bis zu 7 l liefert. Zur Herstellung des Intelligenzsaftes werden pro Liter 1 kg Geisttrauben benötigt, pro l Krafttrunk 2 kg. Insgesamt stehen pro Tag 10 kg Geisttrauben zur Verfügung. Vom Intelligenzsaft können täglich höchstens 5 l verkauft werden. Intelligenzsaft kann zu 10 EUR/l und Krafttrunk zu 5 EUR/l verkauft werden.

- a) Formulieren Sie ein lineares Programm, das den Deckungsbeitrag maximiert.
- b) Lösen Sie das lineare Programm graphisch.
- c) Wie verändert sich das lineare Programm, wenn vom Krafttrunk nicht mehr als 3 l pro Tag verkauft werden können?
- d) Wie verändert sich das lineare Programm, wenn der Verkaufspreis vom Krafttrunk auf 7 EUR/l erhöht wird?

Aufgabe 2: Lineare Programmierung

Restaurantbesitzer Luigi (L) plant eine Erweiterung seines Lokals. Dazu möchte er einen bisher ungenutzten Nebenraum von 180 m² als Grillstube einrichten. Geplant sind eine Biertheke mit Barhockern sowie Tische für 4 bis 10 Personen. Damit L. bei der Anordnung der Tische möglichst flexibel ist, will er nur eine Tischgröße anschaffen, die für 4 Personen ausreichend Platz bietet. Durch entsprechendes Aneinanderreihen mehrerer dieser Tische können jederzeit Tischgrößen für 6 Personen (2 Tische), 8 Personen (3 Tische) bzw. 10 Personen (4 Tische) zusammengestellt werden. Für die normale Bestuhlung braucht L. mindestens folgende Tischgrößen: 6 Stück für 4 Personen, 6 Stück für 6 Personen, 4 Stück für 8 Personen und 2 Stück für 10 Personen.

Für größere Gesellschaften möchte L. in der Lage sein, die Tische z.B. in Hufeisenform anzuordnen. Zu diesem Zweck braucht er als Reserve mindestens 12 zusätzliche Tische und 38 zusätzliche Stühle.

Die Hausbrauerei bietet L. zum Vorzugspreis Stühle für 60 EUR/Stück, Tische für 90 EUR/Stück und Barhocker zu 70 EUR/Stück an. Die Bartheke stellt die Brauerei kostenlos zur Verfügung.

L. benötigt für jeden Tisch 5 Stofftischdecken zu 40 EUR/Stück. Für den gesamten Nebenraum muss mit 15.000 EUR Renovierungskosten gerechnet werden. L. verfügt

über 25.000 EUR Eigenkapital und kann bei der Brauerei ein zinsfreies Darlehen bis zu 20.000 EUR erhalten.

Der durchschnittliche Platzbedarf beträgt pro Stuhl einschließlich Tischanteil $0,80 \text{ m}^2$ und pro Barhocker $0,40 \text{ m}^2$, die Biertheke benötigt 25 m^2 , für Garderobe, Durchgänge u.a. braucht man 20 m^2 .

Die Anzahl der Stühle soll mindestens das Dreizehnfache der Anzahl der Barhocker betragen. Aus optischen Gründen müssen aber an der Biertheke mindestens 6 Barhocker stehen.

Der geschätzte Monatsumsatz beträgt pro Stuhl 10.000 EUR, pro Barhocker 1.500 EUR.

Formulieren Sie ein lineares Programm, das den Monatsumsatz maximiert.

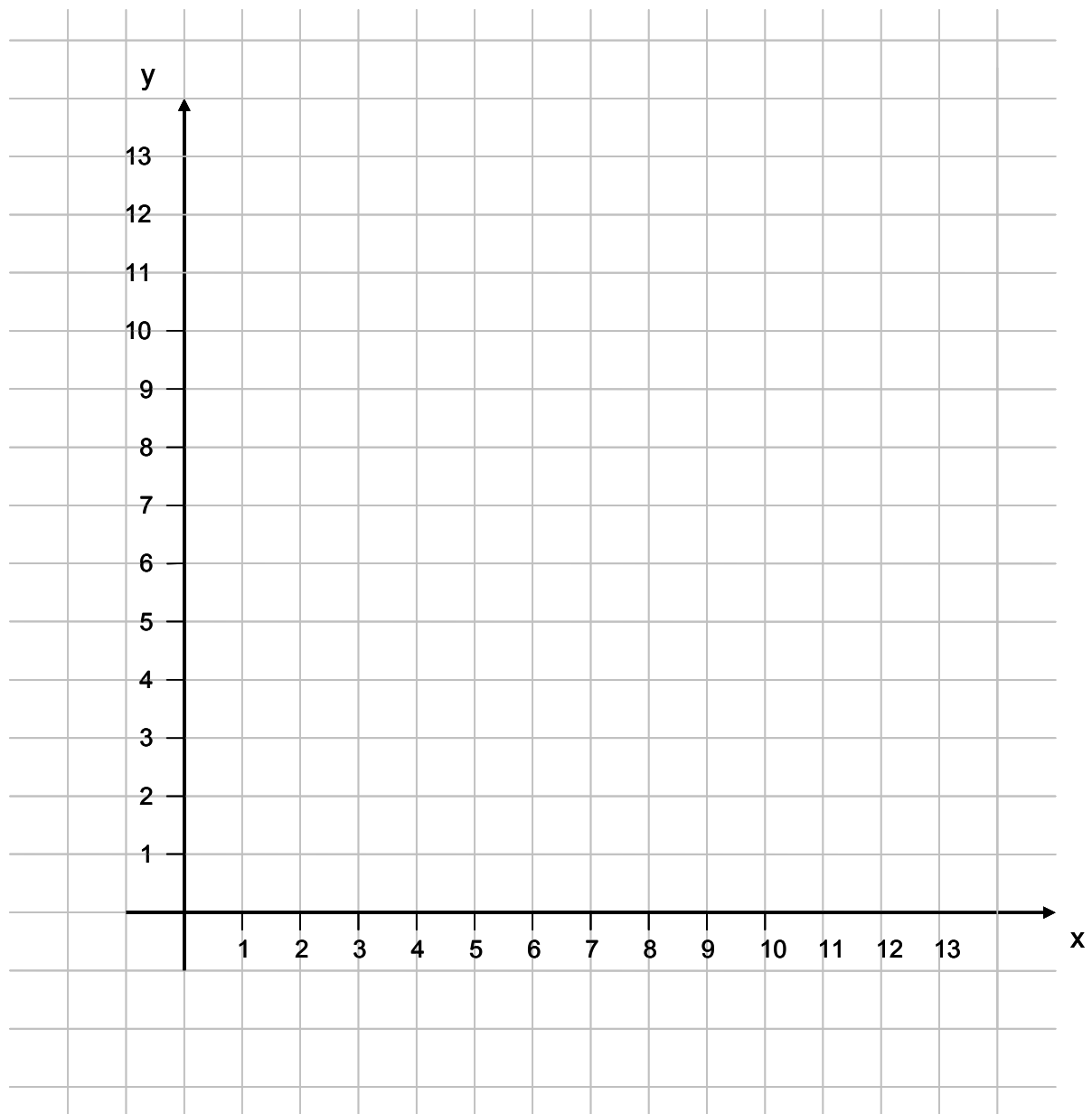
Aufgabe 3: Lineare Programmierung

Gegeben sei folgendes lineares Programm:

Zielfunktion	$Z = ax + by$	mit $a, b \in \mathbb{R}$
Restriktionen	$\begin{aligned} x + y &\leq 13 \\ x + 2y &\leq 20 \\ x + y &\geq 6 \\ x + 2y &\geq 8 \\ x + 3y &\geq 9 \\ x &\leq 10 \\ y &\leq 9 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$	

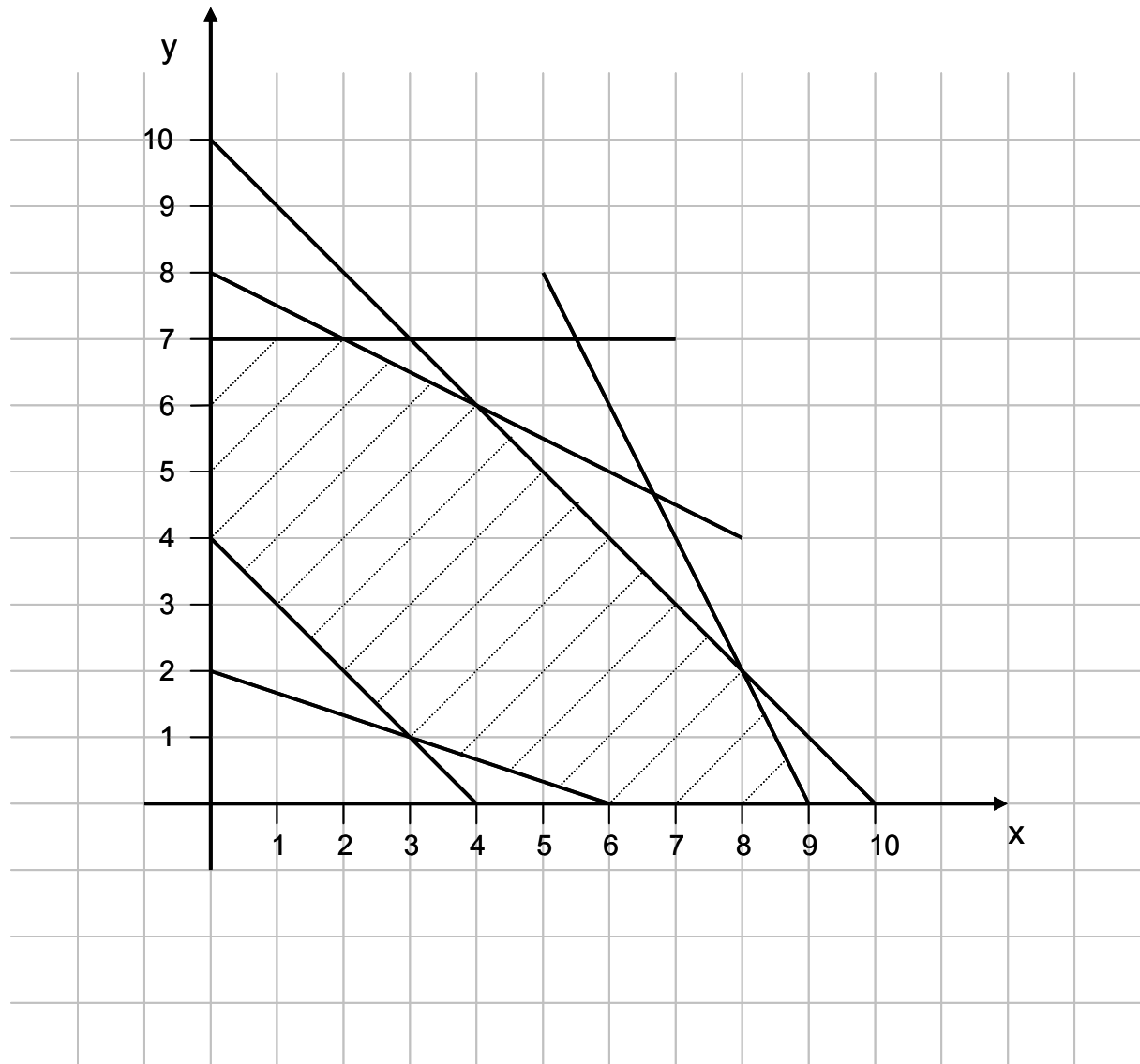
- Ermitteln Sie graphisch die optimale Lösung für $Z = 3x + 2y \rightarrow \text{Max!}$.
- Ermitteln Sie graphisch die optimale Lösung für $Z = x + 2y \rightarrow \text{Max!}$ und $x, y \in \mathbb{IN}$.
- Ermitteln Sie graphisch die optimale Lösung für $Z = 2x + 3y \rightarrow \text{Min!}$.
- Innerhalb welcher Grenzen muss für $Z = ax + 2y \rightarrow \text{Max!}$ a variiert werden, damit die optimale Lösung $x = 6$ und $y = 7$ lautet?
- Innerhalb welcher Grenzen muss für $Z = 2x + by \rightarrow \text{Min!}$ b variiert werden, damit die optimale Lösung $x = 6$ und $y = 1$ lautet?
- Wie groß muss b für $Z = 3x + by \rightarrow \text{Min!}$ und $x, y \in \mathbb{IN}$ sein, damit $x = 2$ und $y = 4$ eine optimale Lösung ist? Wie viele optimale Lösungen gibt es in diesem Fall?

Benutzen Sie zur Lösung der Teilaufgaben a) bis f) die nachfolgende Graphik.



Aufgabe 4: Lineare Programmierung

In der folgenden Graphik sind alle Restriktionen eines linearen Programms eingezeichnet. Zur Lösung der folgenden Teilaufgaben ist die Graphik zu verwenden.



- Ermitteln Sie graphisch die optimale Lösung für $Z = x + y \rightarrow \text{Max!}$ und $x, y \in \mathbb{IN}$.
- Ermitteln Sie graphisch die optimale Lösung für $Z = 2x + 3y \rightarrow \text{Min!}$.
- Innerhalb welcher Grenzen kann für $Z = ax + 3y \rightarrow \text{Max!}$ a variiert werden, damit die optimale Lösung $x = 8$ und $y = 2$ lautet?
- Innerhalb welcher Grenzen kann für $Z = 4x + by \rightarrow \text{Max!}$ b variiert werden, damit die optimale Lösung $x = 4$ und $y = 6$ lautet?
- Wie groß muss b für $Z = 2x + by \rightarrow \text{Min.}$ und $x, y \in \mathbb{IN}$ sein, damit $x = 2$ und $y = 2$ eine optimale Lösung ist? Geben Sie für das ermittelte b alle optimalen Lösungen an.

Aufgabe 5: Lineare Programmierung (Klausur WS 2003/04)

Die Firma Wichtelmann GmbH & Co. KG stellt zwei Sorten Gartenzwerge her:

- 1: Gärtner-Zwerg Jan mit Schaufel, besonders eindrucksvoll in Blumenbeeten.
- 2: Räuberhauptmann-Zwerg Hotzenplotz, Luxusausführung.

Für die Herstellung der Zwerge stehen die zwei Maschinen I und II zur Verfügung. Die Produktionszeiten pro Stück sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

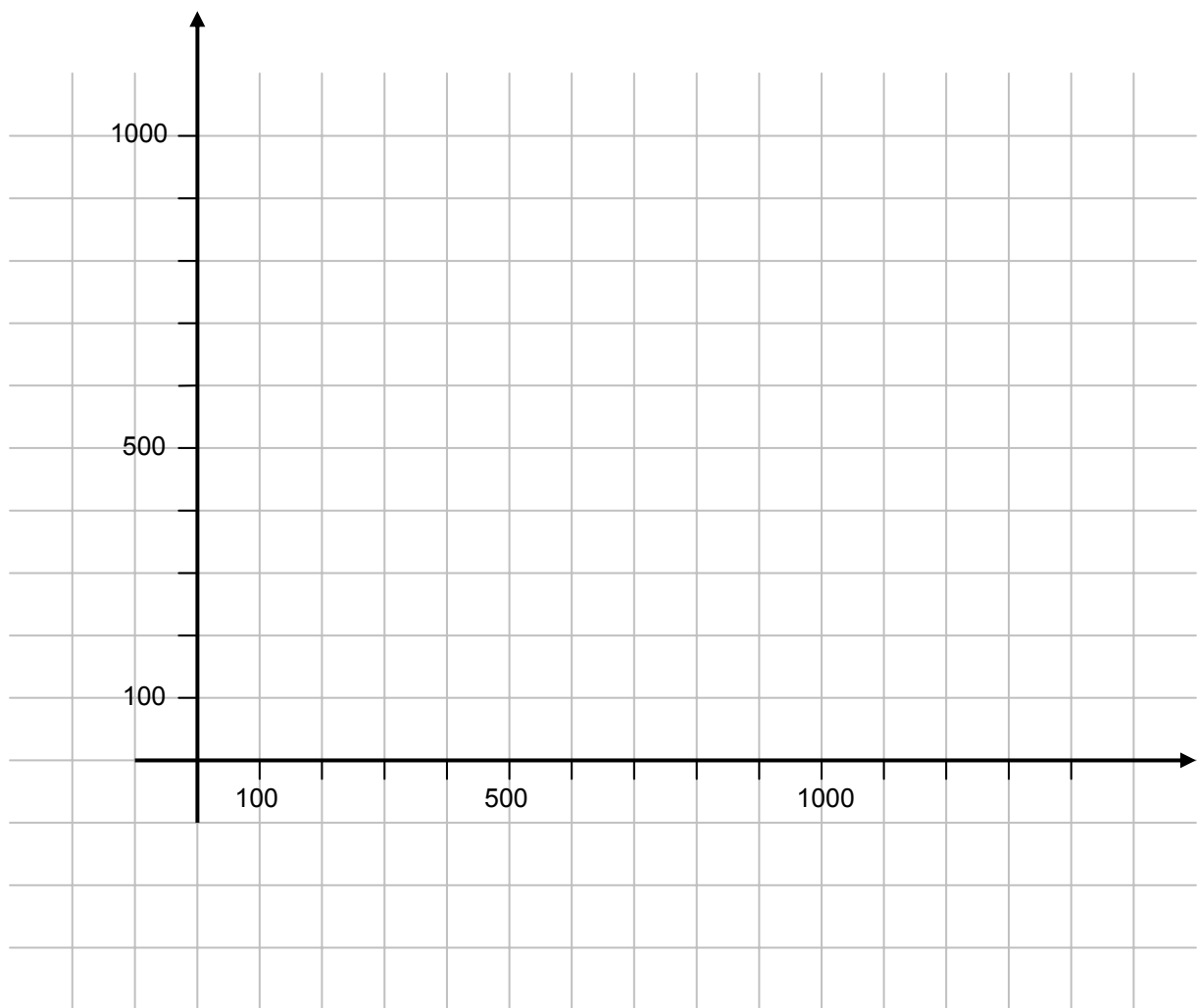
Maschine	Produktionszeit (Minute/Stück)	
	Produkt	
	1	2
I	$\frac{1}{2}$	1
II	3	3

Die verfügbaren Kapazitäten betragen für Maschine I 10 Stunden und für Maschine II 40 Stunden.

Von Zwerg 1 können maximal 500 Stück verkauft werden. Für Zwerg 2 liegt bereits eine Liefervorbestellung von 100 Stück vor. Die Produktionsmenge von Zwerg 2 muss mindestens die Hälfte der Produktionsmenge von Zwerg 1 betragen.

Die Verkaufspreise für Zwerg 1 bzw. Zwerg 2 betragen 10 bzw. 16 GE/Stück; die variablen Kosten 4 bzw. 8 GE/Stück.

- a) Formulieren Sie ein lineares Programm, bei dem der Deckungsbeitrag maximiert werden soll.
- b) Bestimmen Sie graphisch die optimale Lösung, und geben Sie alle Ecken des dadurch entstandenen konvexen Polyeders an.
Verwenden Sie zur graphischen Lösung das vorgegebene Koordinatensystem.



- c) Wie ändert sich das lineare Programm und die optimale Lösung, wenn die variablen Kosten minimiert werden sollen?
Verwenden Sie zur graphischen Lösung, das in a) vorgegebene Koordinatensystem und machen Sie Ihre Lösung kenntlich.
- d) Wie verändert sich das lineare Programm aus Aufgabenteil a), wenn bei Zwerg 1 ein Ausschuss von 10% und bei Zwerg 2 ein Ausschuss von 20% zu erwarten ist?
Verändern Sie die Zielfunktion und die Nebenbedingungen entsprechend. Es ist keine graphische Lösung erforderlich!