

Programmierung II - Übungsblatt 8
Übungsgruppe Do 14-16
Andreas Augustin

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)
Andreas Glitsch (Matrikelnummer 2026130)

Aufgabe 1

Zu zeigen:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j)$$

Beweis durch vollständige Induktion über n :

- Induktionsanfang: $n = 2$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^2 A_i\right) &= P(A_2 \cap A_1) \\ &= P(A_1) \cdot \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \\ &= P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^2 P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j) \end{aligned}$$

- Induktionsbehauptung: Es gilt

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j)$$

- Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n + 1$
- Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P(A_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^n A_i) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \cdot \frac{P(A_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^n A_i)}{P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)} \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \cdot P(A_{n+1} | \bigcap_{i=1}^n A_i) \\ &\stackrel{IA}{=} P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j) \cdot P(A_{n+1} | \bigcap_{j=1}^n A_j) \\ &= P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n+1} P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

Seien $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \Omega$ Ereignisse, zwischen denen folgende Beziehungen bestehen:

$$A_1 \cap A_4 = \emptyset \quad \wedge \quad A_2 \cap A_4 = \emptyset \quad (1)$$

$$A_3 = (A_1 \cap A_2) \cup A_4 \quad (2)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{4} \wedge P(A_2) = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{64} \wedge P(A_4) = \frac{15}{64} \quad (3)$$

Dann gilt:

$$\text{Aus (2)} \Rightarrow P(A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_4) - P((A_1 \cap A_2) \cap A_4)$$

$$P(A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_4) - \underbrace{P(A_1 \cap (A_2 \cap A_4))}_{\substack{= \emptyset \\ = \emptyset}}$$

$$P(A_3) = \frac{1}{64} + \frac{15}{64} - 0 = \frac{1}{4} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_3 &\stackrel{(2)}{=} A_1 \cap ((A_1 \cap A_2) \cup A_4) \\ &= (A_1 \cap (A_1 \cap A_2)) \cup \underbrace{(A_1 \cap A_4)}_{\stackrel{(1)}{=} \emptyset} \end{aligned}$$

$$= A_1 \cap A_2$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{64} \quad (II)$$

$$\begin{aligned} A_2 \cap A_3 &\stackrel{(2)}{=} A_2 \cap ((A_1 \cap A_2) \cup A_4) \\ &= (A_2 \cap (A_1 \cap A_2)) \cup \underbrace{(A_2 \cap A_4)}_{\stackrel{(1)}{=} \emptyset} \end{aligned}$$

$$= A_1 \cap A_2$$

$$\Rightarrow P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{64} \quad (III)$$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap A_3 &\stackrel{(2)}{=} (A_1 \cap A_2) \cap ((A_1 \cap A_2) \cup A_4) \\ &= A_1 \cap A_2, \quad \text{da } A_1 \cap A_2 \subset (A_1 \cap A_2) \cup A_4 \text{ ist} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{64} \quad (IV)$$

Es gilt:

(a)

$$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \stackrel{(3),(I)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \\ \stackrel{(IV)}{=} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Also:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \prod_{i=1}^3 P(A_i)$$

(b)

$$P(A_1) \cdot P(A_2) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{64} \stackrel{(3)}{=} P(A_1 \cap A_2)$$

Also:

$P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) \cdot P(A_2)$, d.h. A_1 und A_2 sind abhängig

(c)

$$P(A_1) \cdot P(A_3) \stackrel{(3),(I)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{64} \stackrel{(II)}{=} P(A_1 \cap A_3)$$

Also:

$P(A_1 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_3)$, d.h. A_1 und A_3 sind abhängig

(d)

$$P(A_2) \cdot P(A_3) \stackrel{(3),(I)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{64} \stackrel{(III)}{=} P(A_2 \cap A_3)$$

Also:

$P(A_2 \cap A_3) \neq P(A_2) \cdot P(A_3)$, d.h. A_2 und A_3 sind abhängig

Insgesamt:

Die Regel (a)

$$P\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \prod_{i=1}^3 P(A_i)$$

bietet also keine Gewähr dafür, dass die Ereignisse A_1, A_2, A_3 auch paarweise unabhängig sind (wegen (b), (c) und (d)). $\square$

Aufgabe 4

S ist die Anzahl aller möglichen Elementarereignisse.

A ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los mit der Nummer 1111111 gezogen wird.

B ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Los mit der Nummer 1234567 gezogen wird.

$$\begin{aligned}
 |S| &= 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65 \cdot 64 = 6041824588800 \\
 |A| &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040 \\
 |B| &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^7 = 823543 \\
 P(A) &= \frac{5040}{6041824588800} = 8,34185 \cdot 10^{-10} \\
 P(B) &= \frac{823543}{6041824588800} = 1,36307 \cdot 10^{-7}
 \end{aligned}$$

Quotient:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = 0,0061198990216661425086486072979796 \approx 6,119899 \cdot 10^{-3}$$

Interpretation: Die Lotterie ist unfair, da die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse nicht gleich sind.

Aufgabe 5

Chaining

0	1	2	3	4	5	6	7
	↓	↓	↓				↓
	337	442	523				423
	↓	↓					
	353	394					
	↓						
	561						

Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	561	353	523	394	442	337	423

quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	561	353	523	442	337	394	423

Double hashing mit $h_2(x) = x \bmod 5$

0	1	2	3	4	5	6	7
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	561	337	523	353	442	394	423