

Programmierung II - Übungsblatt 7
Übungsgruppe Do 14-16
Andreas Augustin

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)
Andreas Glitsch (Matrikelnummer 2026130)

Aufgabe 2

Gegeben: $P(A) = 0.0002$; $P(B|A) = 0.999$; $P(B|A^C) = 0.01$

Gesucht: $P(A|B)$

Lösung: Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^C) \cdot P(B|A^C)} \\&= \frac{0.0002 \cdot 0.999}{0.0002 \cdot 0.999 + 0.9998 \cdot 0.01} \\&= \frac{0.0001998}{0.0101978} \\&= 0.01959246\end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\&= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{(n-1)-k} \\&= np \cdot \underbrace{(p+q)}_{1^{n-1}} \\&= np\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(i)

Zufallsvariable X geometrisch verteilt, falls gilt:

$$P(\{X = k\}) = p \cdot (1-p)^{k-1}, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\wedge P(\{X = n+1\}) = (1-p)^n$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot P(\{X = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^n k \cdot P(\{X = k\}) + (n+1) \cdot P(\{X = n+1\}) \\
&= \sum_{k=1}^n k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} + (n+1) \cdot (1-p)^n \\
&= p \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot (1-p)^{k-1} + (n+1) \cdot (1-p)^n
\end{aligned}$$

Die Hauptrechnung wird hier für folgende Zwischenüberlegung unterbrochen:
Für die endliche geometrische Reihe gilt:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Durch Differenzieren folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k \cdot x^{k-1} &= \frac{-(n+1) \cdot x^n \cdot (1-x) - (1-x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-nx^n + nx^{n+1} - x^n + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1 - x^n - n \cdot x^n(1-x)}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Setzt man $x := 1 - p$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k \cdot (1-p)^{k-1} &= \frac{1 - (1-p)^n - n \cdot (1-p)^n \cdot p}{p^2} \\
&= \frac{1 - (1-p)^n \cdot (1 + n \cdot p)}{p^2} \quad (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E(X) &\stackrel{(*)}{=} p \cdot \frac{1 - (1-p)^n \cdot (1 + np)}{p^2} + (n+1)(1-p)^n \\
&= \frac{1 - (1-p)^n(1 + np) + p(n+1)(1-p)^n}{p} \\
&= \frac{1 - (1-p)^n[1 + np - pn - p]}{p} \\
E(X) &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p}
\end{aligned}$$

Bemerkung 1:

$$E(X) = \frac{1 - (-1p)^{n+1}}{1 - (-1p)} = \sum_{k=0}^n (1-p)^k$$

Bemerkung 2: Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich:

$$E_{\infty}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p} = \frac{1}{p} \quad \text{für } 0 < p \leq 1$$

(ii)

X = Anzahl der Ziehungen, bis Herr K. erstmals einen Lottosechser hat.

$$\left. \begin{array}{l} 52 \text{ Ziehungen pro Jahr} \\ 60 \text{ Jahre lang} \end{array} \right\} \Rightarrow m = 52 \cdot 60 = 3120$$

Verteilung $P(\{X = k\}), k = 1, \dots, m$ mit $p = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

k	1	2	3	4	...	m
$P(\{X = k\})$	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	$(1-p)^3 p$	...	$\underbrace{(1-p)^{m-1} p + (1-p)^m}_{=(1-p)^{m-1}}$

wobei

$$(1-p)^{m-1} p + (1-p)^m = (1-p)^{m-1} \underbrace{[p + 1 - p]}_{=1} = (1-p)^{m-1} \cdot 1$$

Ergebnis: Für die W-Verteilung $P(\{X = k\}), k = 1, \dots, m$ gilt:

$$\begin{aligned} P(\{X = k\}) &= p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, \dots, m-1 \\ P(\{X = m\}) &= p(1-p)^{m-1} + (1-p)^m = (1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} \approx 7.1511238 \cdot 10^{-8}$$

Setzt man in der Formel

$$E(X) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p}$$

aus Teil (i) $n = m - 1$, so folgt:

$$E(X) = \frac{1 - (1-p)^m}{p}$$

Für $m = 3120$ und $p = \frac{1}{\binom{49}{6}}$ ergibt sich:

$$E(X) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}}\right)^{3120}}{\frac{1}{\binom{49}{6}}} = \binom{49}{6} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}}\right)^{3120}\right] \approx 3119.60 \approx 3120$$

□