

Programmierung II - Übungsblatt 6
Übungsgruppe Do 14-16
Andreas Augustin

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)
Andreas Glitsch (Matrikelnummer 2026130)

Aufgabe 1

(a)

Zu zeigen: $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) &\stackrel{Def.}{\Leftrightarrow} \exists c, n_0 \in \mathbb{N}, c > 0, n \geq 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n) \\
 &\stackrel{c>0}{\Leftrightarrow} \exists c, n_0 \in \mathbb{N}, c > 0, n \geq 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq \frac{1}{c}f(n) \leq g(n) \\
 &\stackrel{c' := \frac{1}{c}}{\Leftrightarrow} \exists c, n_0 \in \mathbb{N}, c > 0, n \geq 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq c'f(n) \leq g(n) \\
 &\stackrel{Def.}{\Leftrightarrow} g(n) \in \Omega(f(n))
 \end{aligned}$$

□

(b)

Zu zeigen: $f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$

Beweis:

(Gegen-)Beispiel: $f(n) = \exp(n)$. Das bedeutet:

$$e^{\frac{n}{2}} \in \Theta(e^n) \Leftrightarrow e^{\frac{n}{2}} \in \mathcal{O}(e^n) \wedge e^{\frac{n}{2}} \in \Omega(e^n)$$

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{n}{2}} \in \mathcal{O}(e^n) &\Leftrightarrow \exists c > 0; n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : e^{\frac{n}{2}} \leq ce^n \\
 &\Leftrightarrow \exists c > 0; n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \frac{1}{e^{\frac{n}{2}}} \leq c
 \end{aligned}$$

Dies ist für $c = 1$ offensichtlich erfüllt.

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{n}{2}} \in \Omega(e^n) &\Leftrightarrow \exists c > 0; n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : e^{\frac{n}{2}} \geq c \cdot e^n \\
 &\Leftrightarrow \exists c > 0; n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \frac{1}{e^{\frac{n}{2}}} \geq c
 \end{aligned}$$

Dies wäre für $c = 0$ erfüllt. Da jedoch $c > 0$ sein muss, gibt es kein c für das $\frac{1}{e^{\frac{n}{2}}} \geq c$ gilt. ↯

Somit gilt die Behauptung $f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$ nicht. □

(c)

Zu zeigen: $f(n) \cdot g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n)))$

Beweis:

Beispielsweise wählt man $f(n) := n$ und $g(n) := n^2$. Dann gilt $\forall n > 1$ immer $g(n) > f(n)$ und auch $g(n) = \max(f(n), g(n))$. Würde die Behauptung gelten, dann wäre $n \cdot n^2 = n^3 \in \Theta(n^2)$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n \cdot n^2} = 0$ gilt, so gilt auch $n \in o(n^3) \subset \mathcal{O}(n^3)$. Damit aber $n^3 \in \Theta(n^2)$ gelten kann, müsste auch

$n^3 \in \mathcal{O}(n^2)$ gelten.

Dies ist unmöglich, da gelten müsste:

$$\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq n^3 < cn$$

Da $n > 0$ gilt damit auch $0 \leq n^2 < c \quad \forall n \geq n_0$

⚡

Diese Aussage ist nicht erfüllbar.

(d)

Zu zeigen: $o(f(n)) \cap \omega(f(n)) = \emptyset$

Beweis:

Sei $o(f(n)) \cap \omega(f(n)) \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists g(n) \in o(f(n)) \cap \omega(f(n))$$

$$\Rightarrow \exists g(n) : g(n) \in o(f(n)) \wedge g(n) \in \omega(f(n))$$

$$\Rightarrow \exists g(n) : \forall c > 0 \exists 0 < n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : 0 \leq f(n) < cg(n) \\ \wedge \forall c > 0 \exists 0 < n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : 0 \leq cg(n) < f(n)$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \exists g(n) : \forall c > 0 \exists 0 < n' \in \mathbb{N} : \forall n \geq n' : 0 \leq f(n) < cg(n) \\ \wedge 0 \leq cg(n) < f(n)$$

$$\Rightarrow \exists g(n) : \forall c > 0 \exists 0 < n' \in \mathbb{N} : \forall n \geq n' : 0 \leq cg(n) < f(n) < cg(n) \quad \text{⚡}$$

$$(*) : \quad n' := \max\{n_1, n_2\}$$

Damit ist gezeigt, dass $o(f(n)) \cap \omega(f(n)) = \emptyset$.

□

(f)

Zu zeigen: Für $g(n) \in o(f(n)) : f(n) + g(n) \in \Theta(f(n))$.

Beweis:

$$f(n) + g(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 f(n)$$

Wir wissen, dass $g(n) \in o(f(n))$ ist und

$$\forall c > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) < cf(n).$$

Dann gilt

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq f(n) + g(n) \leq f(n) + f(n)$$

und wir können folgern:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq 2f(n) \leq c_2 f(n)$$

Die Aussage ist für $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$ offensichtlich erfüllt und somit bewiesen. □

Aufgabe 2

(a) Reflexivität: $\forall f : f \in \Theta(f)$

Um $f \in \Theta(f)$ zu zeigen, zeigt man $f \in \mathcal{O}(f)$ und $f \in \Omega(f)$

- $f \in \mathcal{O}(f) \Leftrightarrow \exists c > 0 : f \leq c \cdot f$
Dies ist offensichtlich erfüllt $\forall c > 0$ und $\forall f \geq 0$
- $f \in \Omega(f) \Leftrightarrow \exists c > 0 : f \geq c \cdot f$
Diese Aussage ist erfüllt $\forall c > 0$ und $\forall f \leq 0$.

Somit gilt $f \in \Theta(f)$.

(b) Symmetrie: $\forall f, g : f \in \Theta(g) \Rightarrow g \in \Theta(f)$

Man nimmt auch hier wieder zur Hilfe $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \wedge f \in \Omega(g)$

$$f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \exists c > 0 : f \leq c \cdot g$$

$$f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \exists c > 0 : f \geq c \cdot g$$

$$\begin{aligned} f \leq c \cdot g \quad \wedge \quad f \geq c \cdot g \\ \frac{1}{c} \cdot f \leq g \quad \wedge \quad \frac{1}{c} \cdot f \geq g \\ \xRightarrow{c' := \frac{1}{c}} c' \cdot f \leq g \quad \wedge \quad c' \cdot f \geq g \\ g \in \Omega(f) \quad \wedge \quad g \in \mathcal{O}(f) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g \in \Theta(f)$$

(c) Transitivität: $\forall f, g, h : f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$ Zeige dazu:

- $f \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(h) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(h)$

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(g) &\Leftrightarrow \exists c_f > 0 : f \leq c_f \cdot g \\ g \in \mathcal{O}(h) &\Leftrightarrow \exists c_g > 0 : g \leq c_g \cdot h \end{aligned}$$

Sei $c = c_f \cdot c_g$ und $n_0 = \max\{n_f, n_g\}$ dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$f \leq c_f \cdot g \leq c_f c_g \cdot h \leq c \cdot h$$

$\Rightarrow \exists c > 0; n_0 > 0$ sodass $\forall n \geq n_0$ gilt:

$$f \leq c \cdot h \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(h)$$

- $f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(h) \Rightarrow f \in \Omega(h)$

$$\begin{aligned} f \in \Omega(g) &\Leftrightarrow \exists c'_f > 0 : f \geq c'_f \cdot g \\ g \in \Omega(h) &\Leftrightarrow \exists c'_g > 0 : g \geq c'_g \cdot h \end{aligned}$$

Sei $c' = c'_f \cdot c'_g$ und $n'_0 = \max\{n'_f, n'_g\}$ dann gilt für alle $n \geq n'_0$:

$$f \geq c'_f \cdot g \geq c'_f c'_g \cdot h \geq c' \cdot h$$

$\Rightarrow \exists c' > 0$ sodass gilt:

$$f \geq c' \cdot h \Leftrightarrow f \in \Omega(h)$$

□

Aufgabe 3

Anordnung:

$$\ln(n); \sqrt[3]{n}; e^{\sqrt{n}}; n!; n^n$$

Begründung:

(*) : l'Hôpital

(i)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(n)|}{|\sqrt[3]{n}|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(n)|}{|n^{\frac{1}{3}}|} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\left|\frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}\right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|3|}{|\sqrt[3]{n}|} = 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt[3]{n}|}{|e^{\sqrt{n}}|} &\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}\right|}{\left|\frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}\right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2n^{\frac{1}{2}}|}{|e^{\sqrt{n}} \cdot 3 \cdot n^{\frac{2}{3}}|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2|}{|3n^{\frac{1}{6}} \cdot e^{\sqrt{n}}|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e^{\sqrt{n}}|}{|n!|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} e \right|}{\left| \prod_{i=0}^{n-1} (n-i) \right|} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} e \right|}{\left| \prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} (n-i) \cdot \prod_{i=\sqrt{n}}^{n-1} (n-i) \right|} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} e \right| \cdot |1|}{\left| \prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} (n-i) \right| \cdot \left| \prod_{i=\sqrt{n}}^{n-1} (n-i) \right|} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left| \prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} e \right|}{\left| \prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} (n-i) \right|} \cdot \frac{|1|}{\left| \prod_{i=\sqrt{n}}^{n-1} (n-i) \right|} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=0}^{\sqrt{n}-1} \frac{e}{n-i} \cdot \prod_{i=\sqrt{n}}^{n-1} \frac{1}{n-i} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|n!|}{|n^n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n|}{|n \cdot n \cdot \dots \cdot n|} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1|}{\left| n \cdot \frac{n}{2} \cdot \dots \cdot 1 \right|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a)

Zu zeigen: $2 + 2\log(n) \in \mathcal{O}(\log(n))$

Beweis:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2(\log(n) + 1)|}{|\log(n)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{|\log(n) + 1|}{|\log(n)|} \\ &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{|\log(n)|}{|\log(n)|} + \frac{1}{|\log(n)|} \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 + 2\log(n) \in \mathcal{O}(\log(n))$$

□

(c)

Zu zeigen: $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$

Beweis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n} = \infty$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$$

und damit auch $2^n \in o(3^n)$. Somit kann $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$ nach der Definition von $\mathcal{O}$ nicht gelten. $\nexists$

(d)

Zu zeigen: $2^n \in \Theta(3^n)$

Beweis:

Um die Behauptung zu zeigen wird gezeigt:

$$2^n \in \mathcal{O}(3^n) \wedge 2^n \in \Omega(3^n)$$

- $2^n \in \mathcal{O}(3^n)$

Bilde hierzu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = 0 \Rightarrow 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$$

- $2^n \in \Omega(3^n) \Leftrightarrow \exists c > 0; n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 2^n \geq c \cdot 3^n$

Damit dies gilt, muss $c < 0$ sein, was nach Voraussetzung nicht gilt. $\nexists$