



PROGRAMMIERUNG II, SS 2004 MUSTERLÖSUNG ZUR 8. ÜBUNG

Aufgabe 1: Bedingte Wahrscheinlichkeit (10 Punkte)

Beweis. Sei

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j)$$

die Induktionsvoraussetzung (IV).

Wir machen eine Induktion über n .

Induktionsanfang: $n = 1$: trivial

$n = 2$: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$ aufgrund der Definition von bedingter Wahrscheinlichkeit.

$n \rightarrow n+1$: Die Induktionsvoraussetzung gelte $\forall i \leq n$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \cdot P(A_{n+1} | \bigcap_{i=1}^n A_i) \\ &\stackrel{IV}{=} P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^n P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j) \cdot P(A_{n+1} | \bigcap_{i=1}^n A_i) \\ &= P(A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n+1} P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j) \end{aligned}$$

■

Aufgabe 2: Hypergeometrische Verteilung (5 Punkte)

Bezeichne $\mathcal{H}_{(N,K,n)}\{k\} = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ die Hypergeometrische Verteilung und $\mathcal{B}_{(n,p)}\{k\}$ die Binomialverteilung von Blatt 7 Aufgabe 3.

Sei $0 \leq k \leq n$ fest und $N, K \rightarrow \infty$ ($0 \leq K \leq N$) so, daß $K/N \rightarrow p \in [0, 1]$.

Zeigen Sie, daß dann

$$\mathcal{H}_{(N,K,n)}\{k\} \rightarrow \mathcal{B}_{(n,p)}\{k\}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(N,K,n)}\{k\} &= \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (K-i) \frac{1}{(n-k)!} \prod_{l=0}^{n-k-1} (N-K-l)}{\frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (N-j)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{K-i}{N-i} \cdot \prod_{l=0}^{n-k-1} \frac{N-K-l}{N-k-l} \\ &= \binom{n}{k} \underbrace{\left(\frac{K}{N}\right)^k}_{\rightarrow p} \prod_{i=0}^{k-1} \underbrace{\frac{1-\frac{i}{K}}{1-\frac{i}{N}}}_{\rightarrow 1} \cdot \prod_{l=0}^{n-k-1} \underbrace{\frac{1-\frac{K}{N}-\frac{l}{N}}{1-\frac{k}{N}-\frac{l}{N}}}_{\rightarrow 1-p} \\ &\xrightarrow{K,N \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \mathcal{B}_{(n,p)}\{k\} \end{aligned}$$

■

Aufgabe 3: Unabhängigkeit (10 Punkte)

Ereignisse $A_1 \dots A_n \subset \Omega$ heißen *unabhängig*, falls für alle $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, $1 \leq m \leq n$ gilt

$$P\left(\bigcap_{l=1}^m A_{i_l}\right) = \prod_{l=1}^m P(A_{i_l})$$

Wir betrachten nun das 3-malige Werfen einer Münze. Dabei bezeichne K Kopf und Z Zahl. Damit gilt $|\Omega| = 2^3 = 8$.

$$A = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, K), (Z, K, K)\}$$

$$B = \{(K, x, y) | x, y \in \{K, Z\}\}$$

$$C = \{(x, y, z) | y = z\}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{(K, K, K)\}) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Die Bedingung ist also erfüllt, aber sind A , B und C auch unabhängig? Dies ist bei unserem Beispiel offensichtlich nicht der Fall:

$$P(A \cap B) = P(\{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, K)\}) = \frac{3}{8} \neq P(A) \cdot P(B)$$

Aufgabe 4: Ziehen ohne Zurücklegen (5 Punkte)

Das Zufallsexperiment ist das Ziehen von 7 Kugel aus 70 ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

$$|\Omega| = \frac{70!}{63!}$$

$$|A|_{1111111} = 7! \Rightarrow P(A) = \frac{7!63!}{70!} \approx 8,3419 \cdot 10^{-10}$$

$$|B|_{1234567} = 7^7 \Rightarrow P(B) = \frac{7^7 63!}{70!} \approx 1,3631 \cdot 10^{-7}$$

$$\Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} \approx 163,40$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß 1234567 gewinnt, war 163-mal so groß wie die von 1111111. Das Spiel war also recht unfair.

Aufgabe 5: Hashtabellen (10 Punkte)

Gegeben sei die Menge $I := \{561, 523, 423, 353, 394, 442, 337\}$ und eine Hashfunktion $h(k) = k \bmod 8$. Wie sieht eine zu Anfang leere Hashtabelle aus, wenn sie die Elemente der Menge I in der oben gegebenen Reihenfolge mittels

- Chaining
- Linear probing
- Quadratic probing mit $c_1 = 1, c_2 = 2$
- Double hashing mit einer zweiten Hashfunktion $h_2(x) = x \bmod 5$

einfügen?

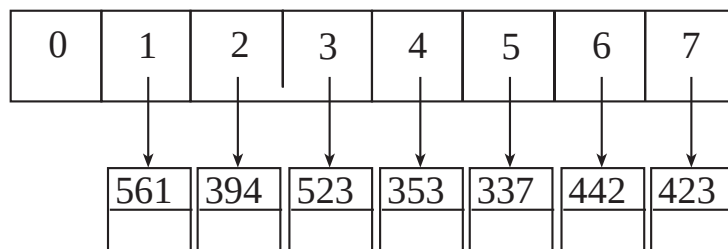
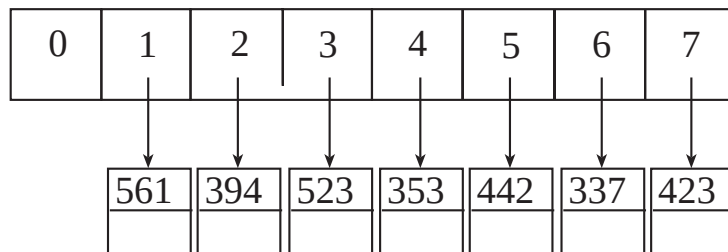
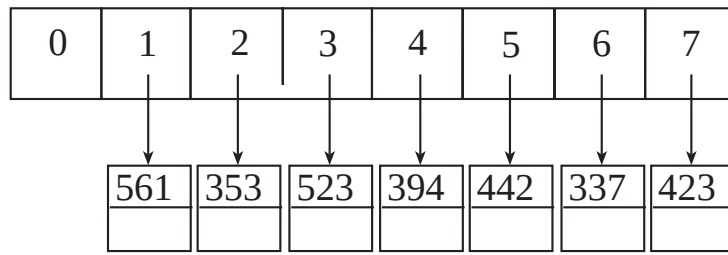
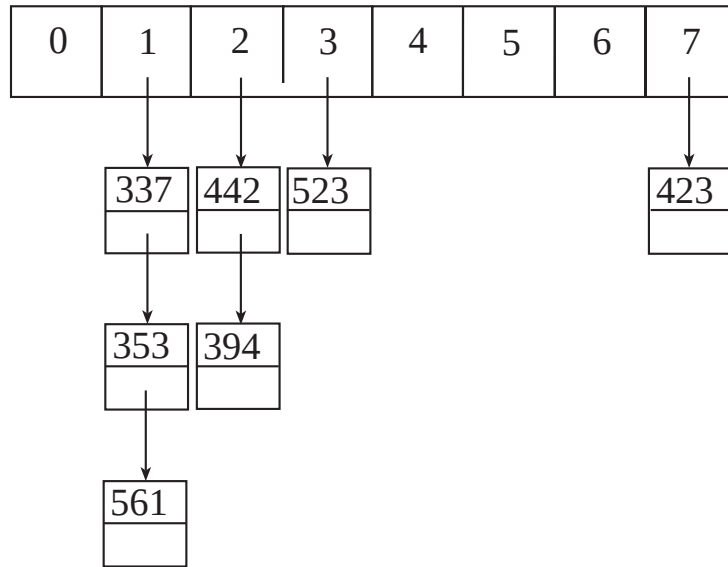


Abbildung 1: Von oben nach unten: Chaining, Linear Probing, Quadratic Probing, Double Hashing