



PROGRAMMIERUNG II, SS 2004 MUSTERLÖSUNG ZUR 6. ÜBUNG

Aufgabe 1: $\mathcal{O}$ -Notation, Teil 1 (10 Punkte)

i) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

Die Behauptung scheint zu stimmen. Also:

zu Zeigen: $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) & \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists c, x_0 \in \mathbb{N}, c > 0, x_0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq f(x) \leq cg(x) \\
 & \stackrel{c>0}{\Leftrightarrow} \exists c, x_0 \in \mathbb{N}, c > 0, x_0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq \frac{1}{c}f(x) \leq g(x) \\
 & \stackrel{c_2:=\frac{1}{c}>0}{\Leftrightarrow} \exists c, x_0 \in \mathbb{N}, c > 0, x_0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq c_2f(x) \leq g(x) \\
 & \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} g(x) \in \Omega(f(n))
 \end{aligned}$$

■

ii) $f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$

Die Aussage mag auf den ersten Blick noch einleuchtend scheinen. Aber betrachtet man exponentielle Funktionen, sieht man, daß es wohl nicht stimmen kann. Also schauen wir uns mal $\exp(x)$ an.

Beweis. Für $e^{\frac{x}{2}} \in \Theta(e^x)$ erhält man mit $\bar{x} := 2x : e^x \in \Theta(e^{\frac{x}{2}})$, insbesondere also $e^x \in \mathcal{O}(e^{\frac{x}{2}})$. Damit muss gelten:

$$\begin{aligned}
 & \exists c > 0, x_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_0 : 0 \leq e^x < ce^{\frac{x}{2}} \\
 & \Leftrightarrow \exists c > 0, x_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_0 : 0 \leq e^{\frac{x}{2}} < c
 \end{aligned}$$

Das ist ein offensichtlicher Widerspruch, und damit haben wir die Aussage per Gegenbeispiel widerlegt! ■

iii) $f(n) \cdot g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n)))$

Beweis. Nehmen wir z.B. $f(x) := x; g(x) := x^2$. Damit gilt: $\forall x > 1 \ g(x) > f(x)$, also immer $g(x) = \max(f(x), g(x))$. Also muss für diese Aussage gelten, daß $x^3 \in \Theta(x^2)$. Damit müsste gelten, daß $x^3 \in \mathcal{O}(x^2)$. Dies gilt natürlich nicht, denn dann müsste gelten: $\exists c > 0, x_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_0 : 0 \leq x^3 < cx^2$ und da $x > 0$ damit auch $0 \leq x < c$. Das gilt offensichtlich nicht. Damit haben wir ein Gegenbeispiel gefunden. ■

iv) $o(f(n)) \cap \omega(f(n)) = \emptyset$

zu Zeigen: $o(f(n)) \cap \omega(f(n)) = \emptyset$

Beweis.

Annahme: Sei $o(f(n)) \cap \omega(f(n)) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \exists g(n) \in o(f(n)) \cap \omega(f(n)) \\ \Rightarrow & \exists g(n) : o(f(n)) \wedge g(n) \in \omega(f(n)) \\ \Rightarrow & \exists g(n) : \forall c > 0 \exists 0 < n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < cg(n) \\ & \wedge \exists g(n) : \forall c > 0 \exists 0 < n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : 0 \leq cg(n) < f(n) \\ \Rightarrow & \exists g(n) : \forall c > 0 \exists 0 < \tilde{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{n} : 0 \leq f(n) < cg(n) \wedge 0 \leq cg(n) < f(n) \\ \tilde{n} := \max(n_0, n_1) \\ \Rightarrow & \exists g(n) : \forall c > 0 \exists 0 < \tilde{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{n} : 0 \leq cg(n) < f(n) < cg(n) \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme! ■

v) $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

Die Aussage macht Sinn. Versuchen wir sie zu zeigen.

“ $\Rightarrow$ ”: Sei $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$.

Es gilt $f(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

“ $\Leftarrow$ ”: Es gelte $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Sei $h \in \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N} : h(n) \leq cf(n) \leq \tilde{c}g(n) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(g(n))$

Sei $h \in \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N} : h(n) \leq cg(n) \leq \hat{c}f(n) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f(n))$

$\Rightarrow \mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$

vi) Für $g(n) \in o(f(n)) : f(n) + g(n) \in \Theta(f(n))$

Sieht vernünftig aus.

Beweis. $f(n) + g(n) \in \Theta(f(n))$

$$\Leftrightarrow \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0 : \forall n \leq n_0 : 0 \leq c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 f(n)$$

Allerdings wissen wir, dass $g(n) \in o(f(n))$, und daher $\forall c > 0 \exists n_0 > 0 : \forall n \leq n_0 : 0 \leq g(n) < cf(n)$. Dann gilt also auch: $\forall n \leq n_0 : 0 \leq f(n) \leq g(n) + f(n) \leq f(n) + f(n)$, und damit können wir schließlich folgern:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq 2f(n) \leq c_2 f(n)$$

was für $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$ offensichtlich erfüllt ist! ■

Aufgabe 2: Äquivalenzrelation (10 Punkte)

zu Zeigen: Θ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

i) Reflexivität: $\forall f : f \in \Theta(f)$

$$\text{Sei } c_1 = c_2 = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : c_1 f(n) \leq f(n) \leq c_2 f(n)$$

ii) Symmetrie: $\forall f, g : f \in \Theta(g) \Rightarrow g \in \Theta(f)$

$$\begin{aligned} \text{Sei } f \in \Theta(g) &\Rightarrow \exists c_1, c_2 > 0 \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \leq n_0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \\ &\Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \wedge \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \end{aligned}$$

iii) Transitivität: $\forall f, g, h : f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$

$$\begin{aligned} \text{Sei } f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) &: \exists c_1, c_2, c_3, c_4 > 0 \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall n \leq n_0 &: c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \wedge c_3 h(n) \leq g(n) \leq c_4 h(n) \\ &\Rightarrow c_1 c_3 h(n) \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \leq c_2 c_4 h(n) \end{aligned}$$

■

Aufgabe 3: $\mathcal{O}$ -Notation, Teil 2 (10 Punkte)

Die Anordnung lautet:

$$\ln(n), \sqrt[3]{n}, e^{\sqrt{n}}, n!, n^n$$

Beweis. Da $\ln(n), e^{\sqrt{n}}, n!, \sqrt[3]{n}, n^n$ differenzierbar und $\lim_{n \rightarrow \infty} (|\ln(n)|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|e^{\sqrt{n}}|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|n!|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\sqrt[3]{n}|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|n^n|) = \infty$, ist im Folgenden l'Hôpital anwendbar!

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(n)|}{|\sqrt[3]{n}|} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|3n^{\frac{2}{3}}|}{|n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|3|}{|n^{\frac{1}{3}}|} = 0$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt[3]{n}|}{|e^{\sqrt{n}}|} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2\sqrt{n}|}{|3n^{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{n}}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2|}{|3n^{\frac{1}{6}} e^{\sqrt{n}}|} = 0$$

$$\text{iii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e^{\sqrt{n}}|}{|n!|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n-\sqrt{n}}} \frac{|\prod_{i=0}^{n-1} e|}{|\prod_{i=0}^{n-1} n-i|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n-\sqrt{n}}} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{e}{n-i} = 0$$

$$\text{iv) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|n!|}{|n^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 \times 2 \times \dots \times n|}{|n \times n \times \dots \times n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1|}{|n \times \frac{n}{2} \times \dots \times 1|} = 0$$

■

Aufgabe 4: $\mathcal{O}$ -Notation, Teil 3 (10 Punkte)

i) *zu Zeigen:* $2 + 2\log(n) \in \mathcal{O}(\log(n))$

Die Aussage scheint zu stimmen, also beweisen wir sie.

$$\text{Beweis. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+2\log(n)}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log(n)} + 2 = 2 < \infty \Rightarrow 2 + 2\log(n) \in \mathcal{O}(\log(n)) \quad \blacksquare$$

ii) *zu Zeigen:* $\Theta(n^2 + n^{\frac{3}{2}}) = \Theta(n^2)$

Scheint recht logisch zu sein, aber zuerst müssen wir es mal zeigen.

$$\text{Beweis. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + n^{-\frac{1}{2}} = 1 \neq 0 \Rightarrow n^2 + n^{\frac{3}{2}} \in \Theta(n^2)$$

Damit gilt dann:

$$\Theta(n^2 + n^{\frac{3}{2}}) = \Omega(n^2 + n^{\frac{3}{2}}) \cap \mathcal{O}(n^2 + n^{\frac{3}{2}}) \stackrel{\text{Aufgabe 1(i)}}{=} \mathcal{O}(n^2) \cap \Omega(n^2) = \Theta(n^2) \quad \blacksquare$$

iii) *zu Zeigen:* $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$

Diese Aussage ist wohl falsch.

$$\text{Beweis. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2^n|}{|3^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{2}{3}\right|^n = 0 \Rightarrow 2^n \in o(3^n) \Rightarrow 3^n \in \omega(2^n) \Rightarrow 3^n \notin \mathcal{O}(2^n) \quad \blacksquare$$

iv) *zu Zeigen:* $2^n \in \Theta(3^n)$

Sieht auch sehr verdächtig aus, also versuchen wir zu beweisen, daß es falsch ist.

$$\text{Beweis. Annahme: } 2^n \in \Theta(3^n)$$

$$2^n \in \Theta(3^n) \Rightarrow 2^n \in \mathcal{O}(3^n) \wedge \underbrace{2^n \in \Omega(3^n)}_{\Rightarrow 3^n \in \mathcal{O}(2^n)}$$

Mit (iii) wissen wir, daß diese Aussage falsch ist. Somit muss unsere Annahme falsch gewesen sein! \blacksquare
