

Nach Satz 43.11 wissen wir, dass orthogonale Mengen linear unabhängig sind.
Kann man umgekehrt aus einer linear unabhängigen Menge eine orthogonale Menge konstruieren?

43.13 Orthogonalisierungsalgorithmus von Gram und Schmidt

Gegeben: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä-Hilbert-Raum mit endlich dimensionalem Unterraum W .

W habe die Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Gesucht: Orthogonalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von W .

Schritt 1:

$$v_1 := u_1$$

Schritt 2: *Zeichnung*

$\lambda_1 v_1$ ist das Lot von u_2 auf $\text{span}(v_1)$.

Ansatz: $v_2 = u_2 - \lambda_1 v_1$ mit Forderung $\langle v_2, v_1 \rangle \stackrel{!}{=} 0$. Dies erlaubt die Bestimmung von λ_1 .

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2 - \lambda_1 v_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - \lambda_1 \|v_1\|^2 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \\ &\Rightarrow v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \end{aligned}$$

Schritt n: Seien $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ orthogonal ($n \geq 2$).

Ansatz: $v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$ mit Forderungen $\langle v_n, v_j \rangle = 0$ für $j = 1, \dots, n-1$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_n, v_j \rangle = \langle u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i, v_j \rangle = \langle u_n, v_j \rangle - \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle \\ &\Rightarrow \lambda_j = \frac{\langle u_n, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \\ &\Rightarrow v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i \end{aligned}$$

Das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren liefert einen konstruktiven Beweis von

43.14 Satz: (Existenz einer Orthogonalbasis)

Jeder endlich dimensionale Prä-Hilbert-Raum besitzt eine Orthogonalbasis.

Bemerkung: Ist der Raum vom Nullvektorraum verschieden, so erhält man eine Orthonormalbasis durch Normierung.

43.15 Beispiel:

Konstruiere aus $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (0, 1, 1)^T$, $v_3 = (0, 0, 1)^T$ mit dem Gram-Schmidt-Algorithmus eine Orthogonalbasis des euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$. Konstruiere anschließend eine Orthonormalbasis.

Lösung:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = (1, 1, 1)^T \\ v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (0, 1, 1)^T - \frac{2}{3}(1, 1, 1)^T \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T \\ v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &= (0, 0, 1)^T - \frac{1}{3}(1, 1, 1)^T - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T \\ &= (0, 0, 1)^T - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)^T \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \end{aligned}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ist die gesuchte Orthogonalbasis im $\mathbb{R}^3$.

Die entsprechende Orthonormalbasis $\{q_1, q_2, q_3\}$ lautet:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \\ q_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)^T \\ q_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)^T \end{aligned}$$

Ein weiteres „Abfallprodukt“ des Gram-Schmidt-Verfahrens ist der

43.16 Satz: (Orthogonale Projektion auf Unterräume)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum, $u \in V$ und sei W ein endlich dimensionaler Unterraum mit Orthogonalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Dann beschreibt

$$proj_w u := \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

eine orthogonale Projektion von u auf W , d.h.

$proj_w u \in W$ und $\langle u - proj_w u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$.

Bemerkung: Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis, gilt also

$$proj_w u = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle v_i$$

. Ist die Orthogonalprojektion eindeutig?

43.17 Def.:

Sei W ein Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann bezeichnet

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

das orthogonale Komplement von W .

43.18 Satz: (Projektionssatz)

Sei W ein endlich dimensionaler Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Dann besitzt jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$v = w_1 + w_2$$

mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

(Man schreibt auch $V = W \oplus W^\perp$ und nennt $\oplus$ direkte Summe.)

Beweis:

Es ist nur die Eindeutigkeit zu zeigen, die Existenz gilt wegen 43.16.

Seien $w_1, w'_1 \in W$ und $w_2, w'_2 \in W^\perp$ mit

$$\begin{aligned} v = w_1 + w_2 &= w'_1 + w'_2 \\ \Rightarrow w_1 - w'_1 &= w'_2 - w_2 \end{aligned}$$

$w_1 - w'_1 \in W$, da Unterräume abgeschlossen sind. Andererseits:

$$\begin{aligned} \langle w'_2 - w_2, w \rangle &= \underbrace{\langle w'_2, w \rangle}_{0 \text{ da } w'_2 \in W^\perp} - \underbrace{\langle w_2, w \rangle}_{0 \text{ da } w_2 \in W^\perp} = 0 \quad \forall w \in W \\ \Rightarrow w'_2 - w_2 &\in W^\perp \end{aligned}$$

. Wegen $w'_2 - w_2 = w_1 - w'_1$ gilt auch $w'_2 - w_2 \in W$.

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\langle w'_2 - w_2, w'_2 - w_2 \rangle}_{\in W} = \|w'_2 - w_2\|^2$$

$$\Rightarrow 0 = w'_2 - w_2 = w_1 - w'_1, \text{ d.h. } w_1 = w'_1, w_2 = w'_2$$

□ Gibt es weitere Anwendungen der Orthogonalprojektion?

43.19 Satz: (Approximationssatz)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$ und W ein endlich dimensionaler Unterraum.

Zu $v \in V$ ist dann $\text{proj}_w v$ die beste Approximation von v in W , d.h.

$$\|v - \text{proj}_w v\| < \|v - w\| \quad \forall w \in W \text{ mit } w \neq \text{proj}_w v$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|v - \underbrace{\text{proj}_w v}_{\in W^\perp} + \underbrace{\text{proj}_w v}_{\in W}\|^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{=} \|v - \text{proj}_w v\|^2 + \|\text{proj}_w v - w\|^2 \\ &\geq \|v - \text{proj}_w v\|^2 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt nur, falls $w = \text{proj}_w v$. □

43.20 Beispiel:

$V = C[0, \frac{\pi}{2}]$ mit Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v(x)dx$.

Bestimme Gerade, die die Funktion $u(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ optimal (bzgl. der induzierten Norm) approximiert.

Lösung: $W = \text{span}(\underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{x}_{v_2})$ Unterraum aller Geraden.

Gesucht: $\text{proj}_w u = \sum_{i=1}^2 \lambda_i v_i$ mit $0 = \langle u - \sum_{i=1}^2 \lambda_i v_i, v_k \rangle \quad (k = 1, 2)$.

In unserem Fall:

$$0 = \langle \sin(x) - \lambda_1 - \lambda_2 x, 1 \rangle \quad (1)$$

$$0 = \langle \sin(x) - \lambda_1 - \lambda_2 x, x \rangle \quad (2)$$

gibt Gleichungssystem für λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 \langle 1, 1 \rangle + \lambda_2 \langle x, 1 \rangle = \langle \sin(x), 1 \rangle$$

$$\lambda_1 \langle 1, x \rangle + \lambda_2 \langle x, x \rangle = \langle \sin(x), x \rangle$$

Mit

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\langle \sin, 1 \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$$

$$\langle x, x \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

$$\langle x, \sin(x) \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 0 + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

lautet das System:

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 8 \frac{\pi - 3}{\pi^2} \approx 0,11$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 24 \frac{4 - \pi}{\pi^3} \approx 0,66$$