

§43: Orthogonalität

43.1. Motivation: Das Euklidische Produkt zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$, die einen Winkel θ einschliessen, lässt sich auch schreiben als: $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$.

Ist $\theta = \frac{\pi}{2}$, so ist $u \cdot v = 0$, und u und v nennt man orthogonale Vektoren. Wir wollen nun diese Begriffe des Winkels und der Orthogonalität in allgemeinen Prä-Hilbert-Räumen formulieren. Dies führt zu Darstellungen in Orthogonalbasen, die wichtige Anwendungen in der Informatik haben, z.B. in der geometrischen Datenverarbeitung, der Bildverarbeitung und im Information Retrieval.

43.2. Definition: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ mit induzierter Norm $\|\cdot\|$. Für nicht verschwindende Vektoren $u, v \in V$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\theta \in [0, \pi)$ mit $\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$, die wir als Winkel zwischen u und v definieren. Wir nennen u und v orthogonal, falls $\langle u, v \rangle = 0$ ist.

43.3. Beispiele: a) Euklidischer Raum $\mathbb{R}^4$, $u = (4, 3, 1, -2)^T$, $v = (-2, 1, 2, 3)^T$ $|u| = (16 + 9 + 1 + 4)^{1/2} = \sqrt{30}$ $|v| = (4 + 1 + 4 + 9)^{1/2} = \sqrt{18}$

$$u \cdot v = -8 + 3 + 2 - 6 \cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{-9}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{18}} \approx -0,3873 \Rightarrow \theta \approx 1,968 (= 112,8^\circ)$$

b) $C([-1, 1])$ mit Skalarprodukt $\langle u, v \rangle := \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$ Mit $u(x)=x$, $v(x)=x^2$ ergibt sich $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ Die Funktionen $u(x) = x$ und $v(x) = x^2$ sind also orthogonal in $C([-1, 1])$

Verallgemeinerung von Satz 41.13.:

43.4. Satz (Satz des Pythagoras in Prä-Hilbert-Räumen) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Dann gilt für orthogonale (!) Vektoren $u, v \in V$: $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \underbrace{2\langle u, v \rangle}_0 + \|v\|^2$. $\square$

43.5. Beispiel: $C([-1, 1])$ mit Skalarprodukt $\langle u, v \rangle := \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$ Nach 43.3.(b) sind $u(x) = x$ und $v(x) = x^2$ orthogonal.

$$\begin{aligned} \|u, v\|^2 &= \int_{-1}^1 (x + x^2)^2 dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x^3 + x^4) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15} \\ \|u\|^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \|v\|^2 = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 - 1 = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Wie erwartet gilt also: $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15} = \|u + v\|^2$.

In Prä-Hilbert-Räumen ist es oft sinnvoll, Basen zu wählen, deren Elemente paarweise orthogonal sind.

43.6. Definition: Eine Menge von Vektoren in einem Prä-Hilbert-Raum heisst orthogonale Menge, wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind. Haben sie ausserdem die induzierte Norm 1, so heisst die Menge orthonormal. Bildet eine Basis eines Prä-Hilbert-Raumes eine orthogonale (orthonormale) Menge, spricht man von einer Orthogonalbasis (Orthonormalbasis).

43.7. Beispiele: $u_1 = (0, 1, 0)^T$, $u_2 = (1, 0, 1)^T$, $u_3 = (1, 0, -1)^T$ bilden eine orthogonale Menge im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, denn es gilt:

$$u_1 \cdot u_2 = 0, u_1 \cdot u_3 = 0, u_2 \cdot u_3 = 0$$

Zwar ist $|u_1| = 1$, aber wegen $|u_2| = \sqrt{2} = |u_3|$ ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ keine orthonormale Menge. Um eine orthonormale Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ zu erhalten, muss man durch die Euklidischen Normen dividieren.

$$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = (0, 1, 0)^T, v_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, v_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

43.8. Satz: (Koordinatendarstellung in Orthonormalbasis) Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis eines endlich dimensionalen Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann gilt für jeden Vektor $u \in V$:

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

Beweis: Da S Basis ist, existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

$$\Rightarrow \langle u, v_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle = \alpha_k, \text{ da } \langle v_i, v_k \rangle = 1 \text{ falls } (i = k),$$

sonst 0.

Dies gilt für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ □

43.9. Beispiel: $v_1 = (0, 1, 0)^T, v_2 = (-4/5, 0, 3/5)^T, v_3 = (3/5, 0, 4/5)^T$ bilden eine Orthonormalbasis des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$. Man schreibe $(1, 2, 7)^T$ als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 .

$$u \cdot v_1 = 2 \quad u \cdot v_2 = -\frac{4}{5} + 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{5} \quad u \cdot v_3 = \frac{3}{5} + 7 \cdot \frac{4}{5} = \frac{31}{5}$$

$$\Rightarrow (1, 2, 7)^T = 2 \cdot (0, 1, 0)^T + \frac{17}{5} \cdot (-4/5, 0, 3/5)^T + \frac{31}{5} \cdot (3/5, 0, 4/5)^T$$

43.10. Satz (Koordinatendarstellung in Orthogonalbasis) Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis eines endlich dimensionalen Prä-Hilbert-Raumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit induzierter Norm $\|\cdot\|$.

Dann gilt für jedes $u \in V$:

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Beweis: Aus der Orthogonalbasis S erhält man durch Normierung die Orthonormalbasis $S' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$. Nach Satz 43.8. gilt:

$$u = \left\langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \dots + \left\langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|} = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n. \quad \square$$

Bemerkung: Unter Zusatzvoraussetzungen gelten ähnliche Aussagen in unendlich dimensionalen Prä-Hilbert-Räumen.

43.11. Satz: (Lineare Unabhängigkeit orthogonaler Mengen) Eine orthogonale Menge $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus von 0 verschiedenen Elementen ist linear unabhängig.

Beweis: Wir zeigen, dass aus $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ stets folgt dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Sei also $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$. Dann gilt für jedes $v_k, k \in \{1, \dots, n\}$

$$0 = \langle 0, v_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle = \underbrace{\alpha_k}_{\neq 0} \|v_k\|^2 \text{ da } \langle v_i, v_k \rangle = 0 \text{ für } i \neq k \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \square$$