

§54: TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

54.1 Motivation:

Für eine skalarwertige Funktion f einer reellen Variablen bedeutet Differenzierbarkeit in ξ , dass der Graph der Funktion in ξ eine Tangente besitzt mit Steigung $f'(\xi)$.

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Die Funktion $f(x)$ wird in einer Umgebung von ξ gut durch eine lineare Funktion $g(x) = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ approximiert, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - (f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi))}{x - \xi} = 0$$

Wir wollen nun dieses Konzept auf vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinern.

54.2 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in $\xi \in D$ (total, vollständig) differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $g(x) = A(x - \xi) + f(\xi)$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, sodass

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - (A(x - \xi) + f(\xi))}{|x - \xi|} = 0$$

Wie hängen totale und partielle Differenzierbarkeit zusammen?

54.3 Satz: (Partielle und totale Differenzierbarkeit)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

- (a) Totale Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit:
Ist f in ξ differenzierbar, so ist f auch stetig in ξ .
- (b) Totale Differenzierbarkeit impliziert partielle Differenzierbarkeit:
Ist f in ξ total differenzierbar, so ist f in ξ auch partiell differenzierbar. Die zugehörige Matrix der linearen Approximation ist identisch mit der Jacobi-Matrix $Jf(\xi)$.
- (c) Stetige partielle Differenzierbarkeit impliziert totale Differenzierbarkeit:
Ist f eine C^1 -Funktion auf D , so ist f auf D auch total differenzierbar.

Beweis: Wir zeigen nur Teil (a) und Teil (b).

- (a) Ist f in ξ differenzierbar, so folgt wegen

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - (A(x - \xi) + f(\xi))}{|x - \xi|} = 0$$

und der Stetigkeit der euklidischen Norm, dass

$$\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x) - A(x - \xi) - f(\xi)| = 0$$

Dann gilt:

$$|f(x) - f(\xi)| \leq \underbrace{|f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi} + \underbrace{|A(x - \xi)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi$$

Das beweist die Stetigkeitsaussage $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$

- (b) Mit den kanonischen Einheitsvektoren $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T$ und $x = \xi + he_j$ folgt aus der totalen Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)}{\|x - \xi\|_\infty}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi} &= \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{|h|} - \frac{hAe_j}{|h|} \\ &= \frac{h}{|h|} \left(\frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h} - Ae_j \right) \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h} = Ae_j \quad j\text{-te Spalte von } A \end{aligned}$$

d.h. f ist partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$

Gelten ähnliche Differentiationsregeln wie bei skalarwertigen Funktionen einer Variablen? Man kann zeigen:

54.4 Satz: (Differentialionsregeln)

- (a) Linearität:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien differenzierbar in $\xi \in D$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dann $\alpha f(x) + \beta g(x)$ in ξ differenzierbar und es gilt:

$$J(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha Jf(\xi) + \beta Jg(\xi)$$

- (b) Kettenregel:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n, E \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $\xi \in D$ differenzierbar und $g : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ in $f(\xi)$ differenzierbar. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ ebenfalls in ξ differenzierbar und es gilt:

$$J(g \circ f)(\xi) = \underbrace{Jg(f(\xi))}_{\text{„äußere Ableitung“}} \cdot \underbrace{Jf(\xi)}_{\text{„innere Ableitung“}}$$

54.5 Bemerkung:

Ein wichtiger Spezialfall dieser Kettenregel ergibt sich für $n = k = 1$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Wir betrachten also $(g \circ f)(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x))$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (g \circ f)'(\xi) &= Jg(f(\xi)) \cdot Jf(\xi) \\ &= \nabla^T g(f(\xi)) \cdot \begin{pmatrix} f'_1(\xi) \\ \vdots \\ f'_m(\xi) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(\xi)) \cdot f'_k(\xi) \end{aligned}$$

§55: DER MITTELWERTSATZ UND DER SATZ VON TAYLOR

55.1 Motivation:

Ab jetzt betrachten wir wieder skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen. Wir wollen dabei weitere Resultate von Funktionen einer Variablen übertragen. Gibt es einen vergleichbaren Mittelwertsatz und einen entsprechenden Satz von Taylor?

55.2 Satz: (Mittelwertsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D . Ferner seien $a, b \in D$ Punkte, deren Verbindungsstrecke

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

ganz in D liegt. Dann gibt es eine Zahl $\theta \in (0, 1)$ mit

$$f(b) - f(a) = \nabla^T f(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a)$$

Beweis:

Wir parametrisieren die Verbindungsstrecke $[a, b]$ so, dass wir den Mittelwertsatz für Funktionen einer Variablen anwenden können.

Setze $h(t) := f(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$. $h(t)$ ist stetig auf $[0, 1]$ und nach der Kettenregel 54.4 (b) auch differenzierbar auf $(0, 1)$. Somit sind die Voraussetzungen für den Mittelwertsatz einer Variablen erfüllt und es gilt:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= h(1) - h(0) \\ &= h'(\theta) \cdot (1 - 0) \quad \text{mit } 0 < \theta < 1 \\ &= \nabla^T f(a + \theta(b - a))(b - a) \quad \text{Kettenregel 54.5} \end{aligned}$$

□55.3 Bemerkung:

Gilt die Bedingung $[a, b] \subset D$ für alle Punkte $a, b \in D$, so heißt die Menge D konvex. Bei konvexen Mengen gilt der Mittelwertsatz also für beliebige Punkte $a, b \in D$.

55.4 Beispiel:

Sei $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y)$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$.

Es gilt: $f(0, 0) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Nach dem Mittelwertsatz existiert also ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} 0 &= f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - f(0, 0) = \nabla^T f\left(\theta \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\cos\left(\theta \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\theta \frac{\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

In der Tat ist diese Gleichung für $\theta = \frac{1}{2}$ erfüllt.