

§53: ABLEITUNGSOPERATOREN FÜR VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN

53.1 Motivation:

Vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen treten in der Informatik z.B. bei der Verarbeitung von Farbbildern auf. Kontinuierliche Farbbilder lassen sich als Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ auffassen. D ist ein rechteckiger Bildbereich und der Wertebereich umschreibt die drei Kanäle rot, grün, blau.

Wie verallgemeinert man Konzepte wie partielle Ableitungen und Gradienten auf vektorwertige Funktionen?

53.2 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\xi \in D$. Die vektorwertige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt partiell differenzierbar in ξ , falls

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h e_i) - f(\xi)}{h}$$

für $i = 1, \dots, n$ existiert. (Dabei ist der Grenzwert vektorwertiger Funktionen im Sinne der euklidischen Norm zu verstehen).

53.3 Bemerkung:

Die partiellen Ableitungen lassen sich komponentenweise berechnen.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\xi) \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Diese $m \cdot n$ partiellen Ableitungen lassen sich als Einträge einer $m \times n$ -Matrix interpretieren. Sie ist die Verallgemeinerung des Gradienten auf den vektorwertigen Fall.

53.4 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in ξ . Dann heißt

$$Jf(\xi) := \begin{pmatrix} \nabla^T f_1(\xi) \\ \vdots \\ \nabla^T f_m(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) von f in ξ .

53.5 Bemerkungen:

- (a) Verwechsle nicht die Hesse-Matrix (2. Ableitung einer skalarwertigen Funktion) mit der Jacobi-Matrix (1. Ableitungen einer vektorwertigen Funktion).

(b) I.A. ist die Jacobi-Matrix weder quadratisch noch symmetrisch.

(c) Gelegentlich schreibt man statt Jf auch Df oder f' .

53.6 Beispiel:

Die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \\ \cos(y) \\ e^{xy} \end{pmatrix}$$

lautet:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & -\sin(y) \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$$

53.7 Def.:

Im Fall $m = n$ ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf D . Ist jede Komponentenfunktion $f_i(x)$ eine C^k -Funktion, so ist $f(x)$ ein C^k -Vektorfeld.

Bemerkung:

Beispiele für Vektorfelder sind Geschwindigkeitsfelder strömender Gase oder der Temperaturgradient innerhalb eines Körpers.

53.8 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die Divergenz durch

$$\operatorname{div} f(\xi) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\xi)$$

Bemerkung:

Formal kann man die Divergenz als Skalarprodukt aus Nabla-Operator und Vektorfeld auffassen. Man schreibt daher manchmal auch $\langle \nabla, f \rangle$, $\nabla^T f$ oder $\nabla \cdot f$.

Man zeigt leicht:

53.9 Satz: (Rechenregeln für die Divergenz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für partiell differenzierbare Vektorfelder $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einer skalarwertigen Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

(a) Linearität: $\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(b) Produktregel: $\operatorname{div}(\varphi f) = (\nabla \varphi)^T f + \varphi \operatorname{div} f$

53.10 Bemerkungen:

- (a) Obwohl der Nabla-Operator und die Divergenz ähnlich aussehen, unterscheiden sie sich in ihrer Wirkung sehr stark:
- Der Nabla-Operator erzeugt aus einer skalarwertigen Funktion eine vektorwertige Funktion.
 - Die Divergenz macht aus einem Vektorfeld eine skalarwertige Funktion.
- (b) Mit Hilfe der Divergenz kann man den Laplace-Operator umschreiben:
Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalarwertige C^2 -Funktion (mehrerer Variablen), so gilt

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Somit kann man z.B. die Diffusionsgleichung $u_t = \Delta u$ umschreiben in $u_t = \operatorname{div}(\nabla u)$.

Neben der Divergenz gibt es noch einen weiteren wichtigen Ausdruck für Vektorfelder.

53.11 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert man die Rotation in $\xi \in D$ durch

$$\operatorname{rot} f(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\xi) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\xi) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\xi) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\xi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\xi) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\xi) \end{pmatrix}$$

53.12 Bemerkung:

- (a) Die Rotation ist nur für Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ definiert.

- (b) Für zwei Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ kann man das Kreuzprodukt $v \times w$ definieren durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

mit den kanonischen Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ und $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

- (c) Mit $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$ kann man $\operatorname{rot} f$ auch formal als Kreuzprodukt $\nabla \times f$ schreiben.

53.13 Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y - z \\ z^2 + x^2 \\ y + 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ -1 - 4x \\ 2x - 3x^2 \end{pmatrix}$$

Man kann ähnliche Rechenregeln wie beim Divergenzoperator zeigen:

53.14 Satz: (Rechenregeln für die Rotation)

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen. Für partiell differenzierbare Vektorfelder $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine skalarwertige Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

- (a) Linearität: $\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- (b) Produktregel: $\operatorname{rot}(\varphi f) = (\nabla \varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$