

Im Gradienten treten alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung auf. Gibt es einen Ausdruck, in dem alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung auftreten?

52.11 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ zweimal partiell differenzierbar. Dann nennt man die Matrix

$$Hf(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\xi) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\xi) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f in ξ .

Bemerkung:

- (a) Für eine C^2 -Funktion ist die Hesse-Matrix nach dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz symmetrisch.
- (b) Wir werden sehen, dass die Hesse-Matrix eine große Rolle bei der Klassifikation von Extrema einer Funktion mehrerer Variablen spielt (Unterscheidung Maxima-Minima usw.).

Ähnlich wie wir aus ∇f die wichtige rotationsinvariante Größe $|\nabla f|$ hergeleitet haben, können wir auch aus Hf eine rotationsinvariante skalare Größe gewinnen. Hierzu betrachten wir die Summe der Diagonalelemente (Spur) von f .

52.12 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ zweimal stetig differenzierbar. Dann nennt man

$$\Delta f(\xi) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

den Laplace-Operator von f in ξ .

Bemerkung:

- (a) Beachte den Unterschied zwischen dem Nabla-Operator ∇ und dem Laplaceoperator Δ .
- (b) In der Bildverarbeitung verwendet man beispielsweise den Laplace-Operator zur Lokalisierung von Kanten. Kanten werden definiert als die Orte, an denen der Laplace-Operator einen Nulldurchgang aufweist.

52.13 Anwendung: (Partielle Differentialgleichungen)

Viele Prozesse in der Physik und den Ingenieurwissenschaften lassen sich durch Gleichungen beschreiben, die Beziehungen zwischen einer gesuchten Funktion (z.B. Druckverteilung, Temperaturverteilung) und ihren partiellen Ableitungen der Ordnung ≤ 2 festlegt (partielle Differentialgleichung 2. Ordnung).

Beispiele:

- (a) Laplace-Gleichung (Potentialgleichung)

$$\Delta u = 0$$

Spielt z.B. eine Rolle bei statischen Problemen in der Elastizitätstheorie. Funktionen, die die Laplace-Gleichung erfüllen, nennt man auch harmonische Funktionen.

- (b) Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u$$

Tritt bei Schwingungsproblemen auf, z.B. in der Ausbreitung von Schallwellen. t beschreibt hierbei die Zeit und

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

misst die örtliche Veränderung.

- (c) Diffusionsgleichung, Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u$$

Beschreibt die Dynamik von Ausgleichsprozessen wie Diffusion und Wärmeleitung. u ist hierbei die Konzentration bzw. Temperatur und t ist die Zeit. In der Bildverarbeitung verwendet man Diffusionsprozesse zum Entrauschen (Diffusionsfilter). u beschreibt dann den Grauwert und die „Diffusionszeit“ ist ein Maß für die Glättung.

Bisher haben wir nur Ableitungen einer Funktion f von mehreren Variablen $x_1, \dots, x_n$ längs der Koordinatenrichtungen $e_1, \dots, e_n$ betrachtet. Können wir dies auf beliebige Richtungen verallgemeinern?

52.14 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi \in D$. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ heißt

$$D_v f(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$$

die Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung) von f in Richtung v .

52.15 Bemerkungen:

(a) Für $v = e_i$ heißt die Richtungsableitung gerade die i -te partielle Ableitung:

$$D_{e_i}f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$$

Dies folgt sofort aus Def. 52.2 und Def. 52.14.

(b) Statt $D_v f$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial v}$ oder f_v .

(c) Die Richtungsableitung $D_v f(\xi)$ beschreibt den Anstieg (die Steigung) von $f(\xi)$ in der Richtung v .

Gibt es ein einfaches Verfahren, wie man Richtungsableitungen berechnet? Man kann zeigen:

52.16 Satz: (Darstellung der Richtungsableitung durch den Gradienten)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in ξ stetig differenzierbar. Dann existiert die Richtungsableitung $D_v f$ für jeden Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$. Es gilt:

$$D_v f(\xi) := v^T \nabla f(\xi)$$

52.17 Beispiel:

$$f(x, y) = e^{-x} \sin(y)$$

Gesucht ist die Richtungsableitung in Richtung $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$.

$$f_x(x, y) = -e^{-x} \sin(y) \Rightarrow f_x\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f_y(x, y) = e^{-x} \cos(y) \Rightarrow f_y\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (D_v f)\left(0, \frac{\pi}{6}\right) &= v^T \cdot \nabla f \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ &= -\frac{3}{10} + \frac{2}{5} \sqrt{3} \end{aligned}$$

52.18 Bemerkungen:

(a) Für $\nabla f \neq 0$ nimmt die Richtungsableitung ihren größten Wert für $v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ an. Dann gilt:

$$D_v f = \frac{\nabla f^T}{|\nabla f|} \nabla f = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} = |\nabla f|$$

Daher zeigt der Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs.

(b) In der Gegenrichtung $v = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ gilt:

$$D_v f = -\frac{\nabla f^T}{|\nabla f|} \nabla f = -|\nabla f|$$

(c) Wählt man eine Richtung v , die orthogonal zu ∇f ist, erhält man

$$D_v f = \frac{(\partial f^\perp)^T}{|\partial f^\perp|} \nabla f = 0$$

Somit ist die Steigung Null, wenn wir uns senkrecht zum Gradienten bewegen:
 $\nabla f(\xi)$ steht in ξ senkrecht zur Höhenlinie $\{x \in D \mid f(x) = f(\xi)\}$.