

§65: ZUFALLSVARIABLE, ERWARTUNGSWERT, VARIANZ

65.1 Motivation

Oft möchte man das Resultat eines Zufallsexperiments einer reellen Zahl zuordnen. Der Gewinn bei einem Glücksspiel ist ein Beispiel hierfür. In diesem Fall interessiert man sich auch für den zu erwartenden Gewinn und für ein Maß für die statistischen Schwankungen. Dies führt uns auf die Begriffe Zufallsvariable, Erwartungswert und Varianz. In der Informatik werden sie u.a. bei der Zuverlässigkeitsanalyse von Systemen benötigt.

65.2 Def.:

Sei Ω ein Stichprobenraum. Eine Funktion X , die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsvariable.

Bemerkung:

Eine Zufallsvariable ist also weder zufällig noch eine Variable, sondern eine Funktion. Man kann sie stets als Gewinn bei einem Glücksspiel interpretieren.

65.3 Beispiel:

Eine faire Münze mit Seiten 0 und 1 werde 3 Mal geworfen. Die Anzahl der Einsen sei der Gewinn. Man kann $\Omega = \{000, 001, \dots, 111\}$ als Stichprobenraum und den Gewinn als Zufallsvariable $X(\omega)$ auffassen:

Ergebnis ω	000	001	010	011	100	101	110	111
Gewinn $X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3
WS $P(\omega)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Verschiedene Ergebnisse ω_i, ω_j können zum selben Gewinn $X(\omega_i) = X(\omega_j)$ führen.

65.4 Def.:

Die Verteilung P_X einer Zufallsvariablen X ordnet jedem Wert $x \in X$ eine Wahrscheinlichkeit $P_X(x)$ zu.

65.5 Beispiel

In Beispiel 65.3 können wir dem Gewinn folgende Wahrscheinlichkeiten zuordnen:

Gewinn x	0	1	2	3
WS $P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Oft veranschaulicht man die Verteilung einer Zufallsvariablen durch ein Histogramm. Da wir meistens diskrete Zufallsvariablen betrachten, sind die Verteilungen ebenfalls diskret.

Interessiert man sich für den Durchschnittsgewinn je Versuchswiederholung, gelangt man zum Begriff des Erwartungswerts:

65.6 Def.:

Unter dem Erwartungswert $E(X)$ einer (diskreten) Zufallsvariablen X versteht man das gewichtete Mittel der Funktion X über Ω , wobei jeder Wert mit seiner Wahrscheinlichkeit gewichtet wird:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$$

65.7 Beispiel:

Für die Zufallsvariable X aus 65.3 erhält man den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{12}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bequemer hätte man den Erwartungswert mit Hilfe der Verteilung P_X berechnet (vgl. Tabelle aus Beispiel 65.5):

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Es gilt also auch:

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_X(x)$$

Bemerkung:

Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen verwendet man Integrale statt Summen.

Mit dem Erwartungswert kann man gut arbeiten, denn es gilt:

65.8 Satz: (Linearität des Erwartungswerts)

Seien X, Y Zufallsvariablen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha \cdot E(X) + \beta \cdot E(Y)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E(\alpha X + \beta Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)) P(\omega) \\ &= \alpha \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) + \beta \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\omega) \\ &= \alpha \cdot E(X) + \beta \cdot E(Y) \end{aligned}$$

□

65.9 Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen

Mit 65.8 wissen wir: $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. Gilt auch $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$?
 Man kann zeigen, dass dies zutrifft, wenn X und Y unabhängig sind, d.h. (vgl. 64.2):

$$P((X = a) \cap (Y = b)) = P(X = a) \cdot P(Y = b) \quad \forall a, b$$

65.10 Beispiele

- (a) Glücksrad mit 4 Ergebnissen, auf denen die Zufallsvariablen X (äußerer Ring, $\{0, 20, 0, 20\}$) und Y (innerer Ring, $\{10, 0, 10, 0\}$) definiert sind.

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 10 \\ E(Y) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 10 = 5 \end{aligned} \right\} E(X)E(Y) = 50$$

$$E(XY) = \frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 10 = 0 \neq E(X)E(Y)$$

X und Y sind nicht unabhängig: Das Ereignis $Y = 0$ hat die WS $\frac{1}{2}$. Weiß man jedoch, dass $X = 20$ eingetreten ist, hat $Y = 0$ die WS 1.

- (b) Glücksrad mit 4 Ergebnissen, Zufallsvariablen X (äußerer Ring, $\{100, 50, 100, 50\}$) und Y (innerer Ring, $\{2, 10, 10, 2\}$)

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{1}{4} \cdot 100 = 75 \\ E(Y) &= \frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 6 \end{aligned} \right\} E(X)E(Y) = 450$$

$$E(XY) = \frac{1}{4} \cdot 50 \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 50 \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 2 = 450 = E(X)E(Y)$$

X und Y sind unabhängig:

$Y = 2$ und $Y = 10$ sind gleich wahrscheinlich. Weiß man z.B., dass $X = 50$ eingetreten ist, so sind $Y = 2$ und $Y = 10$ noch stets gleich wahrscheinlich.

Oft ist man nicht nur am Erwartungswert interessiert, man möchte auch wissen, wie stark die Verteilung um den Erwartungswert streut.

65.11 Def.:

Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X) =: \mu$. Dann versteht man unter der Varianz $V(X) = \sigma^2$ den Erwartungswert von $(X - \mu)^2$:

$$\sigma^2 = V(X) = E((X - E(X))^2)$$

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ nennt man die Standardabweichung (Streuung) von X .

65.12 Berechnung der Varianz

Wegen der Linearität des Erwartungswerts und wegen $E(const.) = const.$ gilt:

$$\begin{aligned} E((X - \mu)^2) &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{\mu} + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit eine wichtige Formel zur Berechnung der Varianz:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad \text{Verschiebungssatz}$$

65.13 Beispiel:

Sei X der Gewinn auf dem Glücksrad.

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3 && \text{mittlerer Gewinn} \\ E(X^2) &= \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 36 = 11 \\ \sigma^2 &= E(X^2) - \mu^2 = 11 - 3^2 = 2 && \text{Varianz} \\ \sigma &= \sqrt{2} && \text{Standardabweichung} \end{aligned}$$