

TEIL E: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS

Wir kennen bisher Differential- und Integralrechnung für Funktionen, die von einer Variablen abhängen. In Informatikgebieten wie Optimierung und Visual Computing spielen jedoch sehr oft Funktionen eine Rolle, die von mehreren Variablen abhängen. Wir müssen daher allgemeinere Konzepte betrachten.

§ 52: PARTIELLE ABLEITUNGEN

52.1 Motivation:

Wir können eine skalarwertige Funktion einer Variablen ableiten.

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

Dieser Ableitungsbegriff ist auch anwendbar bei vektorwertigen Funktionen einer Variablen:

Für

$$f(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

definiert man

$$f'(x) := \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_n(x) \end{pmatrix}$$

Wie aber differenziert man skalarwertige (und später auch vektorwertige) Funktionen mehrerer Variablen, z.B. $f(x_1, x_2) = x_1^3 \cos x_2$?

Differenziert man nach einer Variablen und hält die anderen fest, gelangt man zu partiellen Ableitungen.

52.2 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen (d.h. für alle $x \in D$ existiert ε mit $y \in D \forall y$ mit $|y - x| < \varepsilon$), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi \in D$.

(a) Die Funktion f ist in ξ nach x_i partiell differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h e_i) - f(\xi)}{h}$$

existiert. Dabei bezeichnet e_i den i -ten kanonischen Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$ heißt partielle Ableitung von f nach x_i in ξ .

- (b) Ist f in jedem beliebigen Punkt $\xi \in D$ partiell differenzierbar nach x_i , so heißt f auf D partiell differenzierbar nach x_i . Trifft dies für alle Variablen x_i , $i = 1, \dots, n$ zu, so heißt f partiell differenzierbar (auf D).

Stetigkeitsbegriffe übertragen sich direkt von Funktionen einer Variablen auf Funktionen mehrerer Variablen, indem man Beträge durch euklidische Normen ersetzt. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ stetige Funktionen auf D , so heißt f stetig partiell differenzierbar bzw. C^1 -Funktion auf D .

Bemerkung: Statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man auch $\partial_{x_i} f$, f_{x_i} oder $D_i f$.

52.3 Beispiel:

$$f(x_1, x_2) := x_1^3 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) := 3x_1^2 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) := -x_1^3 \sin x_2$$

$f(x_1, x_2)$ ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar.

Die Ableitungsregeln für Funktionen einer Variablen übertragen sich direkt auf Funktionen mehrerer Variablen:

52.4 Satz: (Differentiationsregeln)

Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so gilt:

(a) Linearität:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(b) Produktregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x)g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

(c) Quotientenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g^2(x)} \quad \text{für } g(x) \neq 0$$

52.5 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ (nach allen x_i) partiell differenzierbar. Dann nennt man den Vektor

$$\text{grad } f(\xi) := \nabla f(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

Gradient von f in ξ .

Den symbolischen Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

nennt man Nabla-Operator (nach der Form eines ägyptischen Saiteninstruments).

52.6 Bemerkungen:

(a) Manche Bücher definieren $\text{grad } f$ als Zeilenvektor und ∇f als Spaltenvektor.

(b) Mit dem Nablaoperator lässt sich Satz 52.4 schreiben als

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha \nabla f + \beta \nabla g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \nabla(f \cdot g) &= (\nabla f)g + f \nabla g \\ \nabla \left(\frac{f}{g} \right) &= \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \quad \text{für } g \neq 0 \end{aligned}$$

(c) Der Vektor $\nabla f(\xi)$ zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt ξ . Seine Länge

$$|\nabla f| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}$$

ist ein Maß für die Steigung.

52.7 Anwendungsbeispiel:

Ein kontinuierliches Grauwertbild kann als Funktion $f(x, y)$ der beiden Ortsvariablen x und y aufgefasst werden. $|\nabla f|$ ist dann ein einfacher Kantendetektor: Kanten befinden sich an Orten (x, y) , in deren Umgebung der Grauwert stark variiert, d.h. $|\nabla f(x, y)|$ groß ist. Die Kante verläuft senkrecht zur Richtung des steilsten Anstiegs (d.h. senkrecht zu ∇f).

Wir verallgemeinern nun den Begriff der Ableitungen höherer Ordnung auf Funktionen mehrerer Variablen:

52.8 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f partiell differenzierbar auf D und sind die partiellen Ableitungen selbst wieder partiell differenzierbar, so erhält man partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Induktiv definiert man die partiellen Ableitungen k -ter Ordnung durch $(i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\})$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \partial x_{i_{k-1}} \cdot \dots \cdot \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdot \dots \cdot \partial x_{i_1}} \right) \quad \text{für } k \geq 2$$

$f(x)$ heißt k -fach partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung k ,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \dots \cdot \partial x_{i_1}} = D_{i_k} \cdot \dots \cdot D_{i_1} f = \partial_{x_{i_k}} \cdot \dots \cdot \partial_{x_{i_1}} f = f_{x_{i_k} \dots x_{i_1}}$$

existieren. Sind sie sogar stetig, so ist f k -fach stetig differenzierbar (C^k -Funktion). Stetige Funktionen werden auch als C^0 -Funktion bezeichnet.

52.9 Satz: (Vertauschbarkeitssatz von Schwarz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Falls f eine C^2 -Funktion ist, sind die partiellen Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Folgerung: Ist f eine C^k -Funktion, so kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k beliebig vertauschen.

52.10 Beispiel:

$$f(x, y, z) = z^2 \cdot \sin(x^3) + (\cos(y)\sin(x) - e^{-x})z^2$$

Berechne f_{xyz} .

Klar: $f(x, y, z)$ ist C^3 -Funktion. Wenn man zuerst nach y partiell differenziert, fallen einige Terme sofort weg.

$$\begin{aligned} f_{xyz} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(f_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(-(\sin(y)\sin(x))z^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-2z\sin(y)\sin(x)) \\ &= -2z\sin(y)\cos(x) \end{aligned}$$