

75.8 Bedeutung des Eigenwerts $\lambda = 1$

Wir interessieren uns für das Verhalten einer endlichen homogenen Markowkette (X_n) für $n \rightarrow \infty$. Für einen Anfangszustand u_0 und eine Übergangsmatrix $M = (p_{ij})$ gilt:

$$\begin{aligned} u_1 &= Mu_0 \\ u_2 &= Mu_1 = M^2 u_0 \\ &\vdots \\ u_n &= M^n u_0 \end{aligned}$$

Ist u_0 Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 1$, gilt:

$$u_n = M^n u_0 = \lambda^n u_0 = u_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. der Zustand u_0 ist stabil.

Darüber hinaus kann man Folgendes zeigen:

75.9 Satz: (Potenzen stochastischer Matrizen)

Sei M eine stochastische Matrix. Genau dann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$, wenn 1 der einzige Eigenwert von M mit Betrag 1 ist.

Beweis einer Richtung:

Wir zeigen: Sei λ ein Eigenwert von M mit $|\lambda| = 1$. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ existiert, ist 1 einziger Eigenwert von M mit Betrag 1. Sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ mit $|\lambda| = 1$:

$$Mv = \lambda v \Rightarrow M^n v = \lambda^n v \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Würde $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ existieren, hätten wir

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M^n \right) v = \lim_{n \rightarrow \infty} (M^n v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^n v) = \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n \right)}_{=: \mu} v$$

Also würde auch $\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n$ existieren. Dann wäre auch

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{n+1} = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \lambda \cdot \mu$$

Wegen $|\lambda| = 1$ ist auch $|\lambda^n| = 1$ und somit auch $|\mu| = 1 \neq 0$. Aus $\mu = \lambda \mu$ folgt damit $\lambda = 1$. $\square$

75.10 Beispiel:

Wir betrachten eine stochastische Matrix, die Eigenwert λ mit $|\lambda| = 1$ besitzt, aber $\lambda \neq 1$ sein kann:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

beschreibt eine zyklische Vertauschung.

Sei

$$\alpha := e^{\frac{2\pi i}{k}} = \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right) \quad (\Rightarrow \alpha^k = e^{2\pi i} = 1)$$

Setzen wir

$$v_j := \begin{pmatrix} \alpha^{1j} \\ \alpha^{2j} \\ \vdots \\ \alpha^{(k-1)j} \end{pmatrix} \quad 0 \leq j \leq k-1$$

so folgt wegen $\alpha^k = 1$

$$Mv_j = \begin{pmatrix} \alpha^j \\ \alpha^{2j} \\ \vdots \\ \alpha^{kj} \end{pmatrix} = \alpha^j v_j$$

Also sind $1, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{k-1}$ sämtliche Eigenwerte von M . Alle haben Betrag 1. Klar: M^n konvergiert nicht für $n \rightarrow \infty$.

75.11 Def.:

Eine endliche homogene Markowkette (X_n) ist im Gleichgewicht, falls zu ihrer Übergangsmatrix $M = (p_{ij})$ ein Zustand u existiert mit

$$Mu = u$$

d.h. u ist Eigenvektor von M zum Eigenwert 1. Zusätzlich muss gelten:

$$\sum_{i=1}^k u_i = 1, \quad u_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

75.12 Beispiel

Im Beispiel 75.3 war die Übergangsmatrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = (0.8 - \lambda)(0.9 - \lambda) - 0.02 \\
 &= 0.72 - 0.8\lambda - 0.9\lambda + \lambda^2 - 0.02 \\
 &= \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 \\
 \lambda_{1,2} &= \frac{1.7 \pm \sqrt{1.7^2 - 4 \cdot 0.7}}{2} = \frac{1.7 \pm \sqrt{2.89 - 2.8}}{2} \\
 &= \frac{1.7 \pm 0.3}{2} \\
 \lambda_1 &= 1 \\
 \lambda_2 &= 0.7
 \end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 0.2x &= 0.1y \\
 \Rightarrow x &= \frac{y}{2}
 \end{aligned}$$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

Zusätzlich muss gelten:

$$\alpha \geq 0, \quad \alpha + 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{Gleichgewichtszustand}$$

$\frac{1}{3}$ der Personen wohnt in Kalifornien, $\frac{2}{3}$ außerhalb.

Wann ist es möglich, bei einer Markowkette von einem Zustand in einem beliebigen anderen zu gelangen?

75.13 Def.:

Eine stochastische Matrix $M = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ heißt transitiv (irreduzibel), wenn man von jedem Zustand n mit positiver Wahrscheinlichkeit in jeden Zustand m in endlich vielen Schritten gelangen kann:

Es gibt ein r , so dass für $M^r =: B = (b_{ij})$ gilt:

$$b_{mn} > 0$$

75.13 Praktisches Kriterium für Irreduzibilität

Man zeichnet zur Übergangsmatrix $M = (p_{ij})$ einen gerichteten Graphen: Ist $p_{ij} > 0$, zeichnet man einen Pfeil von j nach i . Fall man von jedem Zustand längs solcher Pfeile zu jedem anderen Zustand gelangt, ist M irreduzibel, andernfalls nicht.

75.14 Beispiele

(a)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(Graph siehe gescannte Vorlesung)

irreduzibel: Es gibt von jedem Punkt einen Weg zu jedem anderen Punkt.

beachte: Ein Weg darf auch mehrere Pfeile umfassen. Daher führt ein Weg von 2 nach 2.

(b)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(Graph siehe gescannte Vorlesung)

irreduzibel.

(c)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(Graph siehe gescannte Vorlesung)

reduzibel: Es führt z.B. kein Weg von 1 nach 2.