

§51: NUMERISCHE BERECHNUNG VON EIGENWERTEN UND EIGENVEKTOREN

51.1 Motivation:

Die Berechnung der Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ über die Nullstellen von $\det(A - \lambda \cdot I)$ führt für $n \geq 5$ auf Polynome, für die keine analytischen Lösungsformeln gibt. Das macht numerische Verfahren notwendig.

51.2 Die einfache Vektoriteration (Potenzmethode, Von-Mises-Verfahren)

Idee: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $u_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Startvektor. Lassen sich mit der Iteration

$$u_{k+1} = Au_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren von A gewinnen?

Lösung:

Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte und $v_1, \dots, v_n$ die zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren von A .

o.B.d.A.: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Sei

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \\ \Rightarrow u_1 &:= Au_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i Av_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i \\ \text{analog } u_k &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1 \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \alpha_i v_i \right) \end{aligned}$$

Falls $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ (d.h. λ_1 ist dominanter Eigenwert) so konvergiert

$$\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \alpha_i v_i$$

gegen Nullvektor 0 für $k \rightarrow +\infty$.

Falls der Startvektor u_0 „genügend allgemein“ gewählt wurde (sodass $\alpha_1 \neq 0$), so konvergiert u_k mit geeigneter Normierung gegen den dominanten Eigenvektor v_1^* mit $\|v_1^*\| = 1$, v_1^* parallel zu v_1 .

Die Konvergenz ist umso schneller, je kleiner die $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|$ sind ($i = 2, \dots, n$).

Den Rayleigh-Koeffizienten

$$R_A(u_k) = \frac{\langle u_k, Au_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

konvergiert dann und ist gleich

$$\frac{\langle \alpha_1 v_1, \lambda_1 \alpha_1 v_1 \rangle}{\langle \alpha_1 v_1, \alpha_1 v_1 \rangle} = \lambda_1$$

Die Vektoriteration ist also ein einfaches Verfahren zur numerischen Approximation des dominanten Eigenwertes (und somit der Spektralnorm) und des dominanten Eigenvektors einer symmetrischen Matrix A . In der Praxis normiert man u_k nach jedem Iterationsschritt um zu vermeiden, dass u_k numerisch „explodiert“ (für $|\lambda_1| > 1$) bzw. gegen 0 geht (für $|\lambda_1| < 1$).

51.3 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1.04 & 0.72 \\ 0.72 & 1.46 \end{pmatrix}$$

Startvektor $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_0$ (schon normiert)

$$u_1 = Av_0 = \begin{pmatrix} 1.04 \\ 0.72 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} \approx \begin{pmatrix} 0.8222 \\ 0.5692 \end{pmatrix}, \quad R_A(v_0) = \frac{v_0^T Av_0}{v_0^T v_0} = v_0^T u_1 \approx 1.04$$

$$u_2 = Av_1 = \begin{pmatrix} 1.2649 \\ 1.4230 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{u_2}{|u_2|} \approx \begin{pmatrix} 0.6645 \\ 0.7476 \end{pmatrix}, \quad R_A(v_1) = v_1^T u_2 \approx 1.8500$$

$$u_3 = Av_2 = \begin{pmatrix} 1.2294 \\ 1.5699 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{u_3}{|u_3|} \approx \begin{pmatrix} 0.6166 \\ 0.7873 \end{pmatrix}, \quad R_A(v_2) = v_2^T u_3 \approx 1.9906$$

$$u_4 = Av_3 = \begin{pmatrix} 1.2081 \\ 1.5934 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \frac{u_4}{|u_4|} \approx \begin{pmatrix} 0.6042 \\ 0.7968 \end{pmatrix}, \quad R_A(v_3) = v_3^T u_4 \approx 1.9994$$

$$u_5 = Av_4 = \begin{pmatrix} 1.2020 \\ 1.5984 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \frac{u_5}{|u_5|} \approx \begin{pmatrix} 0.6010 \\ 0.7992 \end{pmatrix}, \quad R_A(v_4) = v_4^T u_5 \approx 1.9999$$

Exakte Lösung für dominanten EV und EW:

$$v = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2$$

51.4 Das Jacobi-Verfahren

Einfaches und robustes Verfahren zur Bestimmung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix.

Grundidee:

- Wendet man auf eine symmetrische Matrix A eine orthogonale Transformation Q an, so haben $Q^T A Q$ und A die selben Eigenwerte.
- Mit Hilfe einer Sequenz $(Q_k)_{k=1, \dots}$ von orthogonalen Matrizen transformiert man A auf Diagonalgestalt. Die Diagonalelemente geben die Eigenwerte an, und aus $(Q_k)_{k=1, \dots}$ berechnet man die Eigenvektoren.

Beweis zu (a):

A und $Q^T A Q$ haben dieselben charakteristischen Polynome, denn:

$$\begin{aligned}
 p_{Q^T A Q}(\lambda) &= \det(Q^T A Q - \lambda I) = \det(Q^T A Q - \lambda \cdot Q^T \cdot Q) \\
 &= \det(Q^T (A - \lambda I) Q) \\
 &= \det(Q^T) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(Q) \\
 &= \det(Q^T Q) \cdot \det(A - \lambda I) \\
 &= \det(A - \lambda I) \\
 &= p_A(\lambda)
 \end{aligned}$$

Also haben A und $Q^T A Q$ dieselben Eigenwerte. $\square$

Einige Details zu (b):

Als orthogonale Transformationen verwendet man Rotationsmatrizen vom Typ

$$Q_k := Q(i, j, \varphi_k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos(\varphi_k) & \dots & \sin(\varphi_k) \\ & & & & 1 & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ & & -\sin(\varphi_k) & \dots & \cos(\varphi_k) & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen, dass $Q_k^T A Q_k$ nur die i -ten und j -ten Zeilen und Spalten von A verändert.

Den Rotationswinkel φ_k wählt man so, dass a_{ij} und a_{ji} zum Verschwinden gebracht werden. Führt man dies iterativ für alle Nichtdiagonalelemente von A durch, kann man zeigen, dass das Verfahren gegen die Diagonalmatrix konvergiert:

$$Q_k^T \cdot \dots \cdot Q_2^T \cdot Q_1^T \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_k \longrightarrow \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Die m -te Spalte von $P = Q_1 \cdot \dots \cdot Q_k$ enthält eine Approximation an den Eigenvektor r_m zum Eigenwert λ_m .

Da P orthogonal ist, enthält man insbesondere auch im Fall von mehrfachen Eigenwerten ein vollständiges ONS von Eigenvektoren.

Gram-Schmidt-Orthonormalisierung ist daher nicht erforderlich. Ein genauer Algorithmus zum Jacobi-Verfahren findet sich in

H.R. Schwarz: *Numerische Mathematik*, Teubner, Stuttgart

Komplexität pro Zyklus (d.h. jedes Nichtdiagonalelement wird einmal auf 0 transformiert) bei einer $n \times n$ -Matrix $\approx 32n^3$ Multiplikationen. Typischerweise werden 6-8 Zyklen benötigt.

Fazit: Eigenwertprobleme (Eigenvektorprobleme) sind numerisch aufwändig!
Es existieren wesentlich kompliziertere numerische Verfahren, insbesondere für nichtsymmetrische Matrizen.