

§50: MATRIXNORMEN UND EIGENWERTE

50.1 Motivation:

- Kann man die Eigenwerte einer Matrix mit geringem Aufwand abschätzen?
- Das spielt z.B. eine Rolle bei Konvergenzbetrachtungen von iterativen Algorithmen.

Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu sind Matrixnormen.

50.2 Def.:

Unter einer Matrixnorm versteht man eine Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $(\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0)$.
- (b) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- (c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- (d) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (submultiplikativität)

50.3 Beispiele: Sei $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- (a) Gesamtnorm: $\|A\|_G := n \cdot \max_{i,k} |a_{ik}|$
- (b) Zeilensummennorm: $\|A\|_Z := \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$
- (c) Spaltensummennorm: $\|A\|_S := \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$
- (d) Frobeniusnorm: $\|A\|_F := \left(\sum_{i,k=1}^n (a_{ik})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
- (e) Spektralnorm: $\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.
Falls A symmetrisch: $\|A\|_2 = \max_k \{|\lambda_k| \mid \lambda_k \text{ Eigenwert von } A\}$

Das Matrizen und Vektoren oft gemeinsam auftreten, sollten Matrix- und Vektornorm verträglich sein:

50.4 Def.:

Eine Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ heißt kompatibel (verträglich) mit einer Vektornorm $\|\cdot\|_V$, falls gilt:

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

50.5 Beispiele:

Zu den p-Normen

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max_i |x_i|, & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

bestehen folgende Verträglichkeiten:

- (a) $\|A\|_G, \|A\|_S$ sind kompatibel zur Betragssummennorm $\|x\|_1$
- (b) $\|A\|_G, \|A\|_F, \|A\|_2$ sind kompatibel zur euklidischen Norm $\|x\|_2$
- (c) $\|A\|_G, \|A\|_Z$ sind kompatibel zur Maximumsnorm $\|x\|_\infty$

Beweis:

Wir zeigen nur Kompatibilität von $\|A\|_G$ und $\|x\|_\infty$:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_i \left\{ \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \right\} \stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \max_i \left\{ \sum_{k=1}^n |a_{ik} x_k| \right\} \\ &\leq \max_i \left\{ \sum_{k=1}^n \max_{r,s} |a_{rs}| \cdot \max_l |x_l| \right\} \\ &= n \cdot \max_{r,s} |a_{rs}| \cdot \max_l |x_l| \\ &= \|A\|_G \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

□

Da zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|_V$ oftmals viele kompatible Matrixnormen $\|\cdot\|_M$ existieren, verwendet man in der Praxis gerne diejenige, für die die Abschätzung $\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$ am schärfsten ist.

50.6 Def.:

Die zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ definierte Zahl

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

heißt zugeordnete Matrixnorm.

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass die zugeordnete Matrixnorm alle Eigenschaften von Def. 50.2 besitzt und die kleinste aller Matrixnormen ist, die zu einer gegebenen Vektornorm kompatibel sind.

50.7 Beispiel: Man erhält:

Vektornorm	zugeordnete Matrixnorm
Betragssummennorm $\ x\ _1$	Spaltensummennorm $\ A\ _S$
euklidische Norm $\ x\ _2$	Spektralnorm $\ A\ _2$
Maximumsnorm $\ x\ _\infty$	Zeilensummennorm $\ A\ _Z$

Matrixnormen sind nützlich zur Abschätzung von Eigenwerten:

50.8 Satz: (Abschätzung von Eigenwerten mittels Matrixnormen)

Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|A\|$ eine beliebige, zur einer Vektornorm verträgliche Matrixnorm, so ist $|\lambda| \leq \|A\|$.

Beweis:

Sei v ein Eigenvektor zu λ .

$$\Rightarrow |\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$

Da $v \neq 0$, gilt $\|v\| > 0$. Daher ist $|\lambda| \leq \|A\|$. □

50.9 Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & -0,1 \\ 0 & 2 & 0,4 \\ -0,2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_G = 3 \max_{i,k} |a_{ik}| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\|A\|_Z = \max\{1.2; 2.4; 3.2\} = 3.2$$

$$\|A\|_S = \max\{1.2; 2.1; 3.5\} = 3.5$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 0,1^2 + (-0,1)^2 + 2^2 + 0,4^2 + (-0,2)^2 + 3^2} = \sqrt{14,22} \approx 3,77$$

$\|A\|_Z$ liefert die schärfste Abschätzung: $|\lambda| \leq \|A\| = 3.2$.

Tatsächlich gilt: $\lambda_1 \approx 3.0060$, $\lambda_2 \approx 2.0078$, $\lambda_3 \approx 0.9862$.

Offenbar erlaubt Satz 50.8 nur die Abschätzung des betragsgrößten Eigenwerts. Gibt es auch Abschätzungen für alle Eigenwerte?

50.10 Satz: (Satz von Gerschgorin)

(a) Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i := \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}| \right\}$$

enthält alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(b) Jede Zusammenhangskomponente aus m solcher Kreisscheiben enthält genau m Eigenwerte (der Vielfachheit nach gezählt).

Beweis: siehe z.B. Stoer/Bulirsch: Einführung in die numerische Mathematik II, Springer, Berlin.

50.11 Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & -0,1 \\ 0 & 2 & 0,4 \\ -0,2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 1| \leq 0.2 \} \\ K_2 &= \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 2| \leq 0.4 \} \\ K_3 &= \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 3| \leq 0.2 \} \end{aligned}$$

Alle Eigenwerte liegen in $K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

Da K_1, K_2, K_3 nicht überlappen, liegt nach 50.10 (b) in jeder der Kreisscheiben genau ein Eigenwert. Ferner ist A invertierbar, da $0 \notin K_1 \cup K_2 \cup K_3$, also 0 kein Eigenwert ist.

50.12 Korollar: (Invertierbarkeit strikt diagonaldominanter Matrizen)

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant (d.h. $|a_{ii}| > \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}| \quad \forall i = 1, \dots, n$), so ist A invertierbar.

Beweis:

Nach dem Satz von Gerschgorin liegt 0 außerhalb der Gerschgorin-Kreisscheiben, kann also kein Eigenwert sein. $\square$