

§75: MARKOWKETTEN

75.1 Motivation

Der Zustand eines Systems zur Zeit $n \in \mathbb{N}$ werde durch eine Zufallsvariable X_n beschrieben und soll nur von X_{n-1} abhängen (nicht jedoch von früheren Zuständen $X_{n-2}, X_{n-3}, \dots$). Wir möchten das zeitliche Verhalten dieses Systems studieren, insbesondere das Langzeitverhalten für $n \rightarrow \infty$. Prozesse dieser Art sind in der Informatik z.B. bei der Untersuchung der Auslastung von Servern wichtig (Warteschlangenmodelle).

75.2 Def.:

Ein stochastischer Prozess ist eine Familie (X_t) von Zufallsvariablen mit $t \in \mathbb{R}$ oder $t \in \mathbb{N}$. Wir denken dabei an t als Zeitparameter, der kontinuierlich oder diskret ist. Ein diskreter stochastischer Prozess $(X_n), n \in \mathbb{N}$ heißt Markowkette, wenn die Verteilung von X_n bei gegebenen X_{n-1} nicht von den früheren Verteilungen $X_k, k < n - 1$ abhängt:

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

Bemerkung:

Wichtig sind insbesondere Markowketten, die nur endlich viele Zustände annehmen:

$$P(X_n \in \{1, \dots, k\}) = 1$$

75.3 Beispiel mit Definition:

Jedes Jahr ziehen 10% der Bevölkerung außerhalb Kaliforniens nach Kalifornien und 20% der Bevölkerung Kaliforniens zieht aus.

Eine Person findet sich im Jahr $n - 1$ in einem von zwei Zuständen:

$$X_{n-1} := \begin{cases} 1 & \text{Person wohnt in Kalifornien} \\ 2 & \text{Person wohnt nicht in Kalifornien} \end{cases}$$

Der Zustand im Jahr n lässt sich ann durch ein graphisches Modell mit Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben:

(Grafik siehe gescannte Vorlesung)

Sei p_{ij}^n die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand j zur Zeit $n - 1$ in den Zustand i zur Zeit n übergeht (z.B. $p_{12}^n = 0.1$)

$$p_{ij}^n = P(X_n = i | X_{n-1} = j)$$

Wir definieren die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten (Übergangsmatrix) durch

$$M_n := (p_{ij}^n) \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad (\text{bei } k \text{ Zuständen})$$

Im Beispiel:

$$M_n = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Die Verteilung von X_n auf die Zustände $1, \dots, k$ werde durch einen Vektor $u_n \in \mathbb{R}^k$ beschrieben:

$$u_n = \begin{pmatrix} u_{n_1} \\ \vdots \\ u_{n_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Dann berechnet sich u_n aus u_{n-1} durch:

$$u_n = M_n u_{n-1}$$

Sind im Beispiel zur Zeit $n-1$ 60% der Bevölkerung außerhalb Kaliforniens, gilt:

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u_n &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.62 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im Jahr n leben also 62% außerhalb Kaliforniens.

75.4 Def.:

Eine Markowkette (X_n) heißt homogen oder Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn die Übergangsmatrix M_n unabhängig von der Zeit n ist:

$$M_n = M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

75.5 Bemerkungen:

- (a) Beispiel 75.3 beschreibt eine homogene Markowkette.
- (b) Wir nennen eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine stochastische Matrix, wenn alle Einträge nicht negativ sind und alle Spaltensummen 1 sind:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \\ \sum_{i=1}^k a_{ij} &= 1 \quad \forall j \end{aligned}$$

Übergangsmatrizen sind Beispiele für stochastische Matrizen.

- (c) In der Stochastikliteratur werden oft Zeilenvektoren u_n betrachtet, und man definiert p_{ij} als die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i nach Zustand j . Dann ist

$$u_n = u_{n-1} M_n$$

und stochastische Matrizen haben Zeilensumme 1.

75.6 Zustandsbeschreibung endlicher homogener Markowketten

(Zeichnung siehe gescannte Vorlesung) Def.:

Sei (X_n) eine endliche homogene Markowkette. Ein Zustand i heißt

- (a) transient, wenn $P(X_m \neq i \forall m > n | X_n = i) > 0$ (kann verlassen werden)
- (b) rekurrent, wenn $P(X_m \neq i \forall m > n | X_n = i) = 0$ (mit Wahrscheinlichkeit 1 kehren wir zurück)
- (c) periodisch mit Periode l , wenn $P(X_{n+l} = i | X_n = i) = 1$

Eine Menge I von Zuständen heißt absorbierend, wenn

$$P(X_{n+1} \in I | X_n \in I) = 1$$

Um das Zeitverhalten von Markowketten zu verstehen, müssen wir stochastische Matrizen näher untersuchen.

75.7 Satz: (Eigenwerte stochastischer Matrizen)

Sei $M = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine stochastische Matrix. Dann gilt:

- (a) $\lambda = 1$ ist Eigenwert von M^T
- (b) $|\lambda| \leq 1$ für alle Eigenwerte λ von M und M^T .
- (c) $\lambda = 1$ ist einziger Eigenwert von M^T mit $|\lambda| = 1$ falls $\min_j p_{jj} > 0$.

Beweis von (a) und (b):

- (a) Ist M stochastisch, so hat $A = M^T$ die Zeilensumme 1.

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j a_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\lambda = 1$ Eigenwert von A zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Betrachte die Spaltensummennorm

$$\|M\|_S := \max \left(\sum_{i=1}^k |p_{ij}| \right) = 1$$

Dann gilt nach Satz 50.8 für jeden Eigenwert λ von M :

$$|\lambda| \leq \|M\|_S = 1$$

Für M^T betrachtet man die Zeilensummennorm.

- (c) Nach dem Satz von Gerschgorin (50.10) gibt es zu jedem Eigenwert λ von $M^T = (a_{ij})$.

$$|\lambda - p_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^k \underbrace{|a_{ij}|}_{\geq 0} = 1 - p_{ii}$$

Also liegt λ in dem Kreis mit Mittelpunkt p_{ii} und Radius $1 - p_{ii}$. Er berührt den Einheitskreis von innen in $(1, 0)$.

$\Rightarrow \lambda = 1$.

Bemerkung:

Aussage 75.7 (c) gilt auch für M statt M^T .