

TEIL F: STOCHASTIK

§61: GRUNDBEGRIFFE

61.1 Motivation

Stochastik (aus Griechischen: vermuten, erwarten) ist die Mathematik des Zufalls. Sie ist von großer Bedeutung in der Informatik.

Beispiel:

- Analyse der Auslastung von Datennetzen
- Modellierung von Antwortzeiten im Rechner
- Zuverlässigkeitsanalyse von Hardware
- Raytracing in der Computergrafik (Monte-Carlo-Simulationen)
- Optimierungsalgorithmen (genetische Algorithmen, simulated annealing)
- Analyse der Laufzeit von Algorithmen
- kombinatorische Probleme in der Bioinformatik

61.2 Gebietsabgrenzung

Stochastik gliedert sich in 2 Gebiete:

(a) Wahrscheinlichkeitstheorie

Ausgehend von einem stochastischen Modell werden Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Beispiel: Modellannahme

Beim Wurf eines Würfels habe jede der Augenzahlen 1 bis 6 die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Folgerung: Wahrscheinlichkeit für Augenzahl 1 oder 3 ist $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

(b) Statistik

Ausgehend von realen Daten/Messungen möchte man Schlussfolgerungen ziehen.

Beispiele:

- möglichst gute Approximationsgerade durch fehlerbehaftete Messwerte legen.
- Hypothesentest: Ist ein neues Medikament wirksam?

61.3 Def.:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses beschreibt die zu erwartende relative Häufigkeit, mit der dieses Ereignis eintritt, wenn man den zu Grunde liegenden

Prozess immer wieder unter den gleichen Bedingungen wiederholt.

Beispiel:

Bei einer „fairen“ Münze beträgt die Wahrscheinlichkeit (WS), Zahl zu erhalten, $\frac{1}{2}$.

61.4 Def.:

Ein Experiment heißt Laplace-Experiment, wenn es endlich viele, einander ausschließende Ausgänge hat, die alle gleich wahrscheinlich sind.

Beispiel:

- Der Wurf eines Würfels hat 6 gleich berechnigte Ausgänge $\Rightarrow$ Laplace-Experiment
- Fällt ein Marmeladenbrot zu Boden, gibt es zwei Ausgänge, die nach Murphy nicht gleich wahrscheinlich sind $\Rightarrow$ kein Laplace-Experiment, falls dies stimmt

61.5 Mengentheoretische Wahrscheinlichkeitsbeschreibung

Def.:

Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit endlich vielen Ausgängen und definieren 3 Begriffe:

- Ergebnismenge Ω (Stichprobenraum, Grundraum)
endliche, nicht leere Menge, deren Elemente ω_i die Versuchsausgänge beschreiben.
Bsp.: Würfelexperiment $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$
- Ereignis
Teilmenge von Ω .
Bsp.: Ergebnisse, bei denen 2 oder 5 gewürfelt wird. $\Rightarrow$ Ereignis $A = \{2, 5\}$.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsmaß
Abbildung P von der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ nach $[0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:
 - Normiertheit: $P(\Omega) = 1$
 - Nichtnegativität: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$
 - Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

§62: KOMBINATORIK

62.1 Motivation

Die Kombinatorik liefert wichtige Modelle zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten. Sie liefert eine grundlegende Rolle in der Informatik.

62.2 Zwei grundlegende Sprechweisen

- (a) Stichprobensprechweise, Urnenmodell
 Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden k Kugeln gezogen. Dabei kann das Ziehen mit oder ohne Zurücklegen erfolgen und die Reihenfolge eine oder keine Rolle spielen.
- (b) Zuordnungssprechweise, Schubladenmodell
 k Objekte werden auf n Schubladen verteilt. Dabei sind die Objekte entweder unterscheidbar oder nicht unterscheidbar und die Schubladen dürfen einfach oder mehrfach besetzt werden.
 Urnen- und Schubladenmodell sind äquivalent

Urnenmodell	Schubladenmodell
mit / ohne Zurücklegen	mit / ohne Mehrfachbesetzung
mit / ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	unterscheidbare / ununterscheidbare Objekte

62.3 Produktregel der Kombinatorik

Bei einem k -stufigen Experiment habe der Ausgang einer Stufe keinen Einfluss auf die Anzahl der möglichen Ausgänge bei späteren Stufen. Haben die einzelnen Stufen $n_1, \dots, n_k$ Ausgänge, so hat das Gesamtexperiment $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ Ausgänge. Die Produktregel ist wichtig bei der Beschreibung der vier kombinatorischen Grundsituationen.

62.4 Die vier kombinatorischen Grundsituationen

- (a) Geordnete Stichprobe mit Wiederholung
 Bei k Ziehungen mit Zurücklegen aus einer Urne mit n Objekten gibt es bei Berücksichtigung der Reihenfolge n^k Möglichkeiten
 Beispiel (aus einem älteren Stochastikbuch):
 Herr Meier will seinen ungezogenen Sohn mit 10 Ohrfeigen bestrafen. Auf wie viele Arten kann er das tun, wenn er bei jedem Schlag 1 von 2 Möglichkeiten hat (links oder rechts)?
 Es gibt $2^{10} = 1024$ Möglichkeiten.
- (b) Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung
 Urnenmodell: k Ziehungen aus n Objekten ohne Zurücklegen, aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge.
 Möglichkeiten: $\underbrace{n}_{1. \text{ Ziehung}} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \underbrace{(n-k+1)}_{k\text{-te Fakultät}} = \frac{n!}{(n-k)!}$
 Spezialfall: $k = n \Rightarrow n!$ Möglichkeiten
 Für große n approximiert man $n!$ mit der Stirling-Formel.

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

Beispiel:

Herr Meier will seine 5 Kinder in einer Reihe anordnen für eine Gruppenaufnahme.

Es gibt $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten.

- (c) Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung

Wie in (b), jedoch müssen die $k!$ Permutationen der k gezogenen Elemente miteinander identifiziert werden.

Daher gibt es nur $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Beispiel:

Beim Lottospielen gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

Möglichkeiten.

- (d) Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung

Hier ist das Schubladenmodell sinnvoll: Es sollen k nicht unterscheidbare Objekte in n Schubladen verstaut werden, wobei Mehrfachbesetzung möglich ist.

Gesamtzustand ist beschrieben durch die Reihenfolge von k Objekten und $n-1$ Trennungsstrichen.

$$\Rightarrow \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1} \text{ Möglichkeiten}$$

Beispiel:

Auf wie viele Arten kann man 60 Parlamentssitze auf 3 Parteien verteilen?

$$k = 60, n = 3 \Rightarrow \binom{62}{60} = \binom{62}{2} = \frac{62 \cdot 61}{2 \cdot 1} = 1891 \text{ Möglichkeiten}$$