

§60: UMKEHRFUNKTIONEN UND DIE TRANSFORMATIONSREGEL

60.1 Motivation:

Wir haben bereits viele Konzepte von Funktionen einer Variablen auf Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinert:

- Differenzierbarkeit
- Mittelwertsatz
- Satz von Taylor
- Extrema von Funktionen

Wir wollen nun den Begriff der Umkehrbarkeit einer Funktion verallgemeinern. In diesem Zusammenhang finden wir auch ein Analogon zur Substitutionsregel: die Transformationsregel.

60.2 Erinnerung: (Umkehrbarkeit von Funktionen einer Variablen, vgl. 22.6 (f))
Eine C^1 -Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich lokal invertieren (nämlich in einer Umgebung, in der f streng monoton ist).

Sei $\xi \in (a, b)$. Ist $f'(\xi) \neq 0$, existiert in einer Umgebung von $\eta = f(\xi)$ eine C^1 -Umkehrfunktion g mit $g'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$.

Für Funktionen mehrerer Variablen kann man folgendes Resultat zeigen:

60.3 Satz: (Umkehrsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion. Sei $\xi \in D$. Ist die Jacobi-Matrix $Jf(\xi)$ invertierbar, so ist f lokal invertierbar: Es gibt offene Umgebungen U_1 von ξ und U_2 von $\eta = f(\xi)$, sodass f die Menge U_1 bijektiv auf U_2 abbildet. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ ist eine C^1 -Funktion und es gilt:

$$Jg(\eta) = (Jf(\xi))^{-1}$$

Beweisidee:

Das letzte Resultat folgt aus $g \circ f = id_{U_1}$ (identische Abbildung auf U_1) mit Hilfe der Kettenregel 54.4(b):

$$Jg(\eta) \cdot Jf(\xi) = I$$

Die lokale Existenz einer C^1 -Umkehrfunktion g erfordert ein aufwändiges Resultat (Satz über implizite Funktionen).

60.4 Bemerkungen:

- Wegen der Umkehrbarkeit müssen sowohl Definitionsbereich und Wertebereich von f in $\mathbb{R}^n$ liegen.
- Bijektive C^1 -Funktionen, deren Umkehrungen ebenfalls C^1 -Abbildungen sind, heißen auch C^1 -Diffeomorphismen.
- Der Umkehrsatz besagt, dass C^1 -Funktionen mit regulärer Jacobi-Matrix lokal umkehrbar sind.
Solche Abbildungen kommen in der Praxis oft bei Koordinatentransformation vor.

60.5 Beispiel: (Polarkoordinaten)

Ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man durch seinen Abstand r zum Ursprung und seinem Winkel φ zur x -Achse beschreiben.
Die Funktion

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hat die Jacobi-Matrix

$$Jf(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Da $\det(Jf(r, \varphi)) = r \cdot \cos^2(\varphi) + r \cdot \sin^2(\varphi) = r > 0$, ist f auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ lokal invertierbar:

Für $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ lautet die Umkehrfunktion:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Jg(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r \cdot \cos(\varphi)}{r} & \frac{r \cdot \sin(\varphi)}{r} \\ \frac{-r \cdot \sin(\varphi)}{r^2} & \frac{r \cdot \cos(\varphi)}{r^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$Jg \cdot Jf = \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) & -r \cdot \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r} + \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r} & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D.h.: $Jg = (Jf)^{-1}$.

Beachte: f bildet $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ab, ist aber nicht global invertierbar, da:

$$f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2k\pi) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Die Jacobi-Matrix von Koordinatentransformationen wird u.a. beim Berechnen von Mehrfachintegralen benötigt. Hier verwendet man oft die Transformationsregel, eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel.

60.6 Erinnerung: Substitutionsregel (vgl. 29.6)

Zur Berechnung von $\int_c^d f(x)dx$ setze man $x = g(t)$ mit einer streng monotonen C^1 -Funktion g mit $g(a) = c, g(b) = d$ und formal $dx = g'(t)dt$. Dann gilt:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)dx = \int_{t=a}^{t=b} f(g(t))g'(t)dt$$

Bemerkung:

Ist $c < d$ und $g' < 0$, so ist $a > b$. Somit gilt:

$$\int_{x \in [c,d]} f(x)dx = - \int_{t \in [b,a]} f(g(t))g'(t)dt = \int_{t \in [b,a]} f(g(t))|g'(t)|dt$$

Wie verallgemeinert man dies auf skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen? Man kann zeigen:

60.7 Transformationsregel

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir möchten $\int_D f(x)dx$ berechnen. Es existiere eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^1 -Diffeomorphismus $g : E \rightarrow D$. Setze $x = g(t)$. Dann gilt unter geeigneten technischen Voraussetzungen (auf die wir hier nicht eingehen):

$$\int_{x \in D} f(x)dx = \int_{t \in g^{-1}(D)} f(g(t))|\det Jg(t)|dt$$

Beachte: x, t sind hier Vektoren im $\mathbb{R}^n$

60.8 Beispiel: Integration in Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten sind eine 3D-Verallgemeinerung von Polarkoordinaten.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\Theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\Theta) \\ r \sin(\Theta) \end{pmatrix} = g(r, \varphi, \Theta)$$

$$\begin{aligned}
Jg(r, \varphi, \Theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial \Theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\Theta) & -r \sin(\varphi) \cos(\Theta) & -r \cos(\varphi) \sin(\Theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\Theta) & r \cos(\varphi) \cos(\Theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\Theta) \\ \sin(\Theta) & 0 & r \cos(\Theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(Jg(r, \varphi, \Theta)) &= \sin(\Theta) \begin{vmatrix} -r \sin(\varphi) \cos(\Theta) & -r \cos(\varphi) \sin(\Theta) \\ r \cos(\varphi) \cos(\Theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\Theta) \end{vmatrix} \\
&\quad + r \cos(\Theta) \begin{vmatrix} \cos(\varphi) \cos(\Theta) & -r \sin(\varphi) \cos(\Theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\Theta) & r \cos(\varphi) \cos(\Theta) \end{vmatrix} \\
&= \sin(\Theta)(r^2 \sin^2(\varphi) \sin(\Theta) \cos(\Theta) + r^2 \cos^2(\varphi) \sin(\Theta) \cos(\Theta)) \\
&\quad + r \cos(\Theta)(r \cos^2(\varphi) \cos^2(\Theta) + r \sin^2(\varphi) \cos^2(\Theta)) \\
&= \sin(\Theta)r^2 \sin(\Theta) \cos(\Theta) + r \cos(\Theta)r \cos^2(\Theta) \\
&= r^2 \cos(\Theta)
\end{aligned}$$

Wir wollen hiermit das Volumen eines Kugeloktanten berechnen:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \text{und} \quad x, y, z, \geq 0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\int_{(x,y,z) \in V} dx dy dz &= \int_{(r,\varphi,\Theta) \in g^{-1}(V)} |\det g(r, \varphi, \Theta)| dr d\varphi d\Theta \\
&= \int_{\Theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^R r^2 \cos(\Theta) dr d\varphi d\Theta \\
&= \dots = \frac{1}{6} \pi R^3
\end{aligned}$$