

49.5 Normalformel der Quadriken im $\mathbb{R}^3$

(i)

$\text{rang } A = 3$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

(a)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{Ellipsoid}$$

(b)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

(c)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{einschaliges Hyperboloid}$$

Ellipse in 1 Ebene ($x - y$). Hyperbel in 2 Ebenen ($x - z, y - z$)

(d)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \quad \text{zweischaliges Hyperboloid}$$

Ellipse in 1 Ebene ($x - y$). Hyperbel in 2 Ebenen ($x - z, y - z$)

(e)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{Punkt } (0, 0, 0)$$

(f)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{elliptischer Kegel}$$

(ii)

$\text{rang } A = 2$ (ein Eigenwert $= 0$)

(a)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0 \quad \text{elliptisches Paraboloid}$$

in 1 Ebene ($\parallel x - y$) Ellipse. in 2 Ebenen Parabeln

(b)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0 \quad \text{hyperbolisches Paraboloid}$$

(c)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

(d)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{elliptischer Zylinder}$$

(e)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{hyperbolischer Zylinder}$$

(f)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{Gerade (z-Achse)}$$

(g)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{Ebenenpaar mit Schnittgerade (z-Achse)}$$

(iii)

$$\text{rang } A = 1$$

(a)

$$x^2 - 2py = 0 \quad \text{parabolischer Zylinder}$$

(b)

$$x^2 - a^2 = 0 \quad \text{paralleles Ebenenpaar}$$

(c)

$$x^2 + a^2 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

(d)

$$x^2 = 0 \quad \text{Ebene (y-z-Ebene)}$$

(iv)

$$\text{rang } A = 0$$

$$b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \quad \text{allg. Ebenengleichung}$$

49.6 Satz:

Auf dem einschaligen Hyperboloid und auf dem hyperbolischen paraboloid gibt es jeweils zwei Scharen von Geraden.

Beweis für das einschalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Die x-y-Ebene schneidet das Hyperboloid in der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fall 1:

Betrachte zunächst $x = \pm a, y = 0, z = 0$ und die zugehörigen Ebenen, die die Fläche berühren:

$x = \pm a$ Schnitt zwischen Ebene und Hyperboloid besteht aus den Punkten, die beide Gleichungen erfüllen. Setzen daher $x = \pm a$ in die Hyperboloid-Gleichung ein.

$$0 = 1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)$$

also:

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$

Jede dieser Gleichungen beschreibt zusammen mit $x = \pm a$ eine Gerade durch $(\pm a; 0; 0)$.

Fall 2:

Betrachte Punkt $(x_0; y_0; 0)$ mit

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad y_0 \neq 0$$

und die zugehörige Berührungsebene

$$(x - x_0) \frac{x_0}{a^2} + (y - y_0) \frac{y_0}{b^2} = 0 \quad (*)$$

Umformen dieser Ebenengleichung (betrachte $y_0 \neq 0$) ergibt

$$y = y_0 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$$

Einsetzen in Hyperboloidgleichung:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y_0}{b} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0) \right)^2 - \frac{z^2}{c^2} - 1 \\
&= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 2 \frac{x_0}{a^2} (x - x_0) + \frac{b^2}{a^4} \cdot \frac{x_0^2}{y_0^2} (x - x_0)^2 - \frac{z^2}{c^2} - 1 \\
0 &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{2}{a^2} x_0 (x - x_0) + \frac{b^2}{a^4} \cdot \frac{x_0^2}{y_0^2} (x - x_0)^2 - \frac{z^2}{c^2} \\
&= \frac{x - x_0}{a^2} (x + x_0 - 2x_0) + \frac{b^2}{a^4} \cdot \frac{x_0^2}{y_0^2} (x - x_0)^2 - \frac{z^2}{c^2} \\
&= \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \left(\underbrace{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0^2}{y_0^2}}_{=: e^2} \right) - \frac{z^2}{c^2} \\
&= \left(\frac{e}{a} (x - x_0) + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{e}{a} (x - x_0) - \frac{z}{c} \right)
\end{aligned}$$

Jeder Faktor ergibt eine Ebenengleichung, die zusammen mit (*) eine Gerade beschreibt. $\square$