

§ 49: QUADRIKEN

49.1 Motivation:

Quadriken ($\rightarrow$ Def. 48.2) stellen eine wichtige Klasse geometrischer Objekte dar, mit Anwendungen in Computergrafik, Physik u.a.

Ziel:

- gegebene Quadrik auf einfache Form transformieren, sodass sich ihre geometrische Gestalt unmittelbar ablesen lässt
- geometrische Interpretation von Eigenwerten symmetrischer Matrizen

49.2 Grundlegende Verfahrensweise

Gegeben: Quadrik $q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $x, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

Schritt 1: Elimination der gemischten quadratischen Terme

Hierzu wird das Koordinatensystem so gedreht, dass A in eine Diagonalmatrix übergeht.

Berechne dazu die Eigenwerte λ_i von A und eine ONB $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren mit $\det(v_1 | \dots | v_n) = 1$. (Falls $\det(\dots) = -1$, ersetzt man v_1 durch $-v_1$)

Mit $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ gilt dann

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^T A Q$$

und aus $x^T A x + b^T x + c = 0$ folgt dann:

$$\underbrace{x^T Q}_{(Q^T x)^T} \Lambda \underbrace{Q^T x}_{(Q^T x)^T} + \underbrace{b^T Q^T}_{(Q^T b)^T} Q x + c = 0$$

Mit $y := Q^T x$, $\tilde{b} := Q^T b$ ergibt sich daher

$$y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c = 0$$

49.3 Beispiel:

Die Quadrik

$$q(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{80}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 0$$

soll auf Normalform gebracht werden.

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}, \quad c = 4$$

1. Schritt: (Hauptachsentransformation von A):

Eigenwerte $\lambda_1 = 9$; $\lambda_2 = 4$; Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = 1$$

Mit $\Lambda = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $\tilde{b} = Q^T b = \begin{pmatrix} -36 \\ -8 \end{pmatrix}$ ergibt sich für $y = Q^T x$:

$$9y_1^2 + 4y_2^2 - 36y_1 - 8y_2 + 4 = 0$$

2. Schritt: (Elimination linearer Terme soweit möglich)

Durch Translation des Koordinatensystems kann erreicht werden, dass ein $\lambda_k y_k^2$ und $\tilde{b}_k y_k$ nicht zugleich vorkommen (für jedes k).

Es sei dazu o.B.d.A. $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$ sowie $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Dann wird für $i = 1, \dots, r$ der lineare Term $\tilde{b}_i y_i$ durch die quadratische Ergänzung eliminiert:

$$z_i := y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$z_i := y_i \quad (i = r + 1, \dots, n)$$

Dann erhält man

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + \tilde{b}_{r+1} z_{r+1} + \dots + \tilde{b}_n z_n + \tilde{c} = 0 \quad \text{mit } \tilde{c} = c - \sum_{i=1}^r \frac{\tilde{b}_i^2}{4\lambda_i} \text{ und } r = \text{rang}(A)$$

$$(9y_1^2 - 36y_1 + 36) + (4y_2^2 - 8y_2 + 4) + (4 - 36 - 4) = 0$$

$$9(y_1^2 - 4y_1 + 4) + 4(y_2^2 - 2y_2 + 1) + 1 - 36 = 0$$

also mit $z_1 := y_1 - 2$ und $z_2 := y_2 - 1$:

$$9z_1^2 + 4z_2^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{9} = 1 \quad \text{Ellipsen mit Halbachsen 2 und 3}$$

3. Schritt: (Elimination der Konstanten falls möglich)

Ist einer der Koeffizienten $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_n$ ungleich 0 (o.B.d.A. sei dies $\tilde{b}_n$), so kann $\tilde{c}$ eliminiert werden durch $z_n \mapsto z_n - \frac{c}{\tilde{b}_n}$ (eine zusätzliche Translation des Koordinatensystems)

RESULTAT: Normalformen der Quadrik

Darstellung in einem Koordinatensystem, in dem möglichst viele Koeffizienten verschwinden.

Für $r := \text{rang}(A) = n$:

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + d = 0$$

Für $r < n$:

$$\text{entweder } \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + e_{r+1} z_{r+1} + \dots + e_n z_n = 0$$

$$\text{oder } \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + d = 0$$

49.4 Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}^2$ (Kegelschnitte)

(i)

$\text{rang}(A) = 2$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

(a)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{Ellipse}$$

(b)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{Hyperbel}$$

(c)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

(d)

$$x^2 + a^2 y^2 = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{Punkt}(0, 0)$$

(e)

$$x^2 - a^2 y^2 = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{Geradenpaar } y = \pm \frac{1}{a} x$$

(ii)

$\text{rang}(A) = 1$ (ein Eigenwert $= 0$)

(a)

$$x^2 - 2py = 0 \quad \text{Parabel}$$

(b)

$$x^2 - a^2 = 0 \quad \text{parallele Geraden } x = \pm a$$

(c)

$$x^2 + a^2 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

(d)

$$x^2 = 0 \quad \text{„Doppelgerade“ } x = 0$$

(iii)

$\text{rang}(A) = 0$ (alle Eigenwerte = 0)

$$b_1x + b_2y + c = 0 \quad \text{Gerade}$$