

§59: VARIATIONSRECHNUNG

59.1 Motivation:

Bisher haben wir uns mit Optimierungsproblemem befasst, bei denen ein einzelner optimaler Wert (Max. oder Min. einer Funktion, evtl. mit Nebenbedingungen) gesucht war.

Wir gehen jetzt zu Problemen über, bei denen eine gesamte Funktion gesucht wird, die ein Optimalitätskriterium erfüllt. Solche Probleme treten in der Praxis oft auf, z.B.

- (a) Welche Form nimmt ein Bücherbrett an, wenn es gleichmäßig belastet wird? Die gesuchte Funktion minimiert ein Integral, in dem eine Biegeenergie auftritt.
(Verwandtes Problem: Crashsimulationen)
- (b) Ein verrauschtes Signal $f(x)$, $x \in [0, 1]$ soll so gefiltert werden, dass das resultierende Signal $u(x)$ zwar nahe an $f(x)$ liegt, aber nur geringe Schwankungen aufweist. Wir suchen also z.B. $u(x)$ als Minimierer des „Energiefunktional“ (ein Funktional ist eine Abbildung von einer Funktion nach $\mathbb{R}$).

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{[(u(x) - f(x))^2]}_{\text{Ähnlichkeit}} + \underbrace{\alpha u_x^2}_{\text{Glattheit}} dx$$

Der freie Parameter $\alpha > 0$ heißt Regularisierungsparameter. Er steuert die Glattheit der Lösung: Je größer α ist, desto stärker werden Abweichungen von der Glattheit bestraft, d.h. desto glatter ist die Lösung.

59.2 Ein diskretes Beispiel:

Das Signal aus 59.1 (b) soll diskret vorliegen

$$f_0, f_1, \dots, f_N \quad \text{mit } f_i = f(ih), h = \frac{1}{N}, i = 0, \dots, N$$

Gesucht ist ein gefiltertes diskretes Signal $u_0, \dots, u_N$, das die skalare Funktion mehrerer Variablen

$$E(u_0, \dots, u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u_i - f_i)^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2$$

minimiert. Notwendige Bedingung für ein Minimum:

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla^T E = \left(\frac{\partial E}{\partial u_0}, \dots, \frac{\partial E}{\partial u_N} \right)$$

Komponentenweise:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial u_0} = (u_0 - f_0) - \alpha \frac{u_1 - u_0}{h^2} \\ 0 &= \frac{\partial E}{\partial u_k} = (u_k - f_k) - \alpha \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h^2} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h^2} \right) \quad k = 1, \dots, N \quad (*) \\ 0 &= \frac{\partial E}{\partial u_N} = (u_N - f_N) - \alpha \left(-\frac{u_N - u_{N-1}}{h^2} \right) \end{aligned}$$

$u_0, \dots, u_N$ muss ein lineares Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} & & & \\ -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + 2\frac{\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + 2\frac{\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} \\ & & & -\frac{\alpha}{h^2} & 1 + \frac{\alpha}{h^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Wegen $\frac{u_{k+1} - u_k}{h^2} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h^2} = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^2)$ sieht (*) aus wie eine diskrete Form von

$$0 = (u - f) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Kann man zeigen, dass diese Differentialgleichung direkt aus dem kontinuierlichen Minimierungsproblem

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [(u - f)^2 + \alpha u_x^2] dx$$

folgt?

59.3 Satz: (Euler-Lagrange-Gleichung)

Jede Lösung des Variationsproblems

- Finde eine differenzierbare Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die das Funktional

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u_x) dx$$

minimiert und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(a) &= \alpha \\ u(b) &= \beta \end{aligned}$$

erfüllt.

ist notwendigerweise Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} = 0$$

Beweis:

Wir nehmen an, dass $u_0(x)$ eine differenzierbare Lösung des Variationsproblems ist und betten $u_0(x)$ in eine Schar von Konkurrenzfunktionen ein:

$$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon h(x)$$

mit einer differenzierbaren Funktion $h(x)$ mit $h(a) = 0 = h(b)$. Da $u_0(x)$ das Integral $E(u)$ minimiert, besitzt

$$g(\varepsilon) := E(u_0 + \varepsilon h)$$

ist $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Daher muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= g'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} E(u_0 + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, u_0 + \varepsilon h, u_{0x} + \varepsilon h_x) dx |_{\varepsilon=0} \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b [F(x, u_0, u_{0x}) h(x) + F_{u_x}(x, u_0, u_{0x}) h_x(x)] dx \end{aligned}$$

Mit der partiellen Integration:

$$\begin{aligned} \int_a^b F_{u_x}(x, u_0, u_{0x}) h_x(x) dx &= \underbrace{F_{u_x}(x, u_0, u_{0x}) h(x) \Big|_a^b}_{=0 \text{ da } h(a)=0=h(b)} - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{u_x}(x, u_0, u_{0x}) h(x) dx \\ \text{folgt: } 0 &= \int_a^b \left[F_u(x, u_0, u_{0x}) - \frac{d}{dx} F_{u_x}(x, u_0, u_{0x}) \right] h(x) dx \end{aligned}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen $h(x)$.

$$\Rightarrow 0 = F_u(x, u_0, u_{0x}) - \frac{d}{dx} F_{u_x}(x, u_0, u_{0x})$$

□

59.4 Erweiterungen von Satz 59.3

Man kann folgendes zeigen:

(a) Keine Randvorgaben

Hat das Variationsproblem keine Randbedingungen, so besitzt die Euler-Lagrange-Gleichung die „natürlichen Randbedingungen“

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_a = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_b = 0$$

(b) Funktionen mehrerer Variablen

Die Variationsgleichung

$$E(u) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$$

führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_{x_1}} - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} F_{u_{x_n}}$$

(c) Höhere Ableitungen

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx$$

führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u_{xx}} - \dots$$

(d) Vektorwertige Funktionen

$$E(u_1, \dots, u_m) = \int_a^b F(x, u_1, \dots, u_m, u_{1x}, \dots, u_{mx}) dx$$

führt auf ein System von Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= F_{u_1} - \frac{d}{dx} F_{u_{1x}} \\ &\vdots \\ 0 &= F_{u_m} - \frac{d}{dx} F_{u_{mx}} \end{aligned}$$

59.5 Beispiel:

Wendet man 59.4(a) auf Beispiel 59.1(b) an, folgt aus

$$F(x, u, u_x) = \frac{1}{2}(u - f)^2 + \frac{\alpha}{2} u_x^2$$

durch partielles Ableiten:

$$F_u = u - f, \quad F_{u_x} = \alpha u_x$$

und somit die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} = u - f - \alpha u_{xx}$$

wie in 59.2 vermutet. Die Diskretisierung in 59.2 stellt ein praktisches Lösungsverfahren für diese Differentialgleichung dar.