

§ 48: QUADRATISCHE FORMEN UND POSITIV DEFINITE MATRIZEN

48.1 Motivation:

- Charakterisierung einer wichtigen Klasse symmetrischer Matrizen (Anwendungen: Physik, Computergrafik)
- Verhalten quadratischer Funktionen in mehreren Variablen

48.2 Def.:

Es sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \underbrace{Mat_{n \times n}(\mathbb{R})}_{=\mathbb{R}^{n \times n}}$ symmetrisch. Dann heißt

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form. Es seien ferner $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c$$

quadratisches Polynom in $x_1, \dots, x_n$.

Die Menge aller Punkte, die die quadratische Gleichung

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0$$

erfüllen, heißt Quadrik.

48.3 Beispiele:

(a)

$$\begin{aligned} 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 &= 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_2 \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist eine quadratische Form.

(b)

$$q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 7x_2 + 3$$

ist ein quadratisches Polynom.

(c)

Die Ellipsengleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$$

beschreibt eine Quadrik mit $n = 2$.

Quadriken mit $n = 2$ können generell als Kegelschnitte (Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, ...) interpretiert werden. Für $n = 3$ entstehen Ellipsoiden, Hyperboloide, Paraboloiden, ...

48.4 Def.:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A . Dann heißt A

- positiv definit, falls $\lambda_i > 0 \forall i$
- positiv semidefinit, falls $\lambda_i \geq 0 \forall i$
- negativ definit, falls $\lambda_i < 0 \forall i$
- negativ semidefinit, falls $\lambda_i \leq 0 \forall i$
- indefinit, falls $\exists i, j$ mit $\lambda_i \lambda_j < 0$

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen positiver Definitheit, quadratischen Formen und Determinanten von Untermatrizen.

48.5 Satz: (Charakterisierung positiv definiter Matrizen)

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann ist A positiv definit genau dann, wenn

$$x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$$

Beweis:

Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\begin{aligned} x^T A x &= \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i \right)^T A \left(\sum_{j=1}^n x_j v_j \right) \\ &\stackrel{47.4}{=} \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i \right)^T \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k v_k^T \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j v_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^T A x &= \sum_{i,j,k=1}^n \lambda_k x_i v_i \underbrace{\left(\underbrace{v_i^T v_k}_{0 \text{ für } i \neq k} \right)}_{0 \text{ für } i \neq k} \underbrace{\left(\underbrace{v_k^T v_j}_{0 \text{ für } k \neq j} \right)}_{0 \text{ für } k \neq j} \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 > 0
\end{aligned}$$

Sei A nicht positiv definit. $\Rightarrow$ Es existiert ein Eigenvektor v von A mit zugehörigem Eigenwert $\lambda \leq 0$; damit

$$v^T A v = v^T \lambda v = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{(v^T v)}_{>0} \leq 0$$

im Widerspruch zu $x^T A x > 0 \forall x \neq 0$. □

48.6 Satz: (Hauptminorenkriterium)

Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn ihre Hauptminoren

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1k} \\ \dots & & \dots \\ a_{k1} & \vdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

für $k = 1, \dots, n$ positiv sind.

48.7 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Ist A positiv definit?

Hauptminoren:

$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} &= -3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3(-4 + 6) - 4(8 - 3) + 9 \cdot 3 \\
&= -6 - 20 + 27 \\
&= 1 > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ positiv definit.

Ähnlich wie zu jeder nichtnegativen Zahl eine Wurzel existiert, gibt es auch die

„Wurzel“ aus einer positiv semidefiniten Matrix.

48.8 Satz: (Wurzel einer positiv semidefiniten Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit. Dann existiert eine positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B^2 = A$.

Beweis:

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $\{v_1, \dots, v_n\}$ die Orthonormalbasis der zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt mit

$$Q := (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$$

und

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dass $A = Q\Lambda Q^T$. Wir setzen

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und

$$B := Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T$$

Dann ist

$$B^2 = Q\Lambda^{\frac{1}{2}} \underbrace{Q^T Q}_I \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T = Q\Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T = Q\Lambda Q^T = A$$

□ Positiv und negativ (semi-)definite Matrizen spielen eine wichtige Rolle beim Nachweis von Maxima/Minima von Funktionen mehrerer Variablen.
Gibt es obere und untere Schranken für quadratische Formen?

48.9 Def.: (Rayleigh-Quotienten)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Dann nennt man

$$R_A(x) := R(x) := \frac{x^T A x}{x^T x}$$

den Rayleigh-Quotienten.

Der Rayleigh-Quotient lässt sich durch die Eigenwerte von A abschätzen.

48.10 Satz (Rayleigh-Prinzip)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$. Dann gilt:

(a)

$$\lambda_n \leq R(x) \leq \lambda_1$$

(b)

Diese Grenzen werden angenommen:

$$\lambda_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} R(x), \quad \lambda_n = \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} R(x)$$

Beweis:

(a)

Aus $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ folgt $x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2$ sowie $Ax = \sum_{i=1}^n x_i A v_i = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i v_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x^T A x &= \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i^T \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j v_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_j x_i x_j v_i^T v_j \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \\ R(x) &= \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq \lambda_1 \\ \geq \lambda_n \end{array} \right. \end{aligned}$$

(b)

Setzt man $x = v_k$, dann ist

$$R(v_k) = \frac{v_k^T A v_k}{v_k^T v_k} = \frac{\lambda_k v_k^T v_k}{v_k^T v_k} = \lambda_k$$

Speziell: $R(v_n) = \lambda_n$, $R(v_1) = \lambda_1$

□