

§71: HYPOTHESENTESTS

71.1 Motivation

Bei Hypothesentests möchte man eine gewisse Annahme über eine Zufallsvariable darauf überprüfen, ob sie korrekt ist. Beispiele:

- Ist eine Münze fair $\left(p = \frac{1}{2}\right)$?
- Sind die Rechner von Hersteller A zuverlässiger als von Hersteller B?

Ein statistisches Experiment soll uns dabei eine Entscheidung mit einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit ermöglichen.

Gegenüber den Verfahren aus §70 kann man in den Rechnungen die Hypothese mitverwenden, hat also mehr in der Hand.

71.2 Parametertest am Beispiel eines Münzexperimentes

Wir beobachten das Ereignis $A = \text{„Münze zeigt Kopf“}$ und wollen die Hypothese $p_0 = p(A) = \frac{1}{2}$ überprüfen. Hierzu führen wir 200 Münzwürfe durch:

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{Münze zeigt Kopf beim } i\text{-ten Wurf} \\ 0 & \text{Münze zeigt Zahl beim } i\text{-ten Wurf} \end{cases}$$

Wie weit darf $S_{200} := \sum_{i=1}^{200} X_i$ sich vom Erwartungswert 100 unterscheiden, damit

wir mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ (Signifikanzniveau von $1 - \alpha = 0.95$) die Hypothese $p_0 = \frac{1}{2}$ nicht ablehnen?

Wir legen eine Binomialverteilung mit $n = 200$, $p = 0.5$ zu Grunde, die wir durch eine Normalverteilung mit $\mu = n \cdot p = 100$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{50} \approx 7.07$ approximieren.

Wegen $\Phi(1.96) \approx 0.975$ ist $c = 1.96$ für $\alpha = 0.05$.

Tritt bei 200 Würfeln eine Kopffzahl S_n außerhalb des Intervalls

$$[\mu - c\sigma, \mu + c\sigma] \approx [86.1, 113.6]$$

auf, lehnt man die Hypothese $p_0 = \frac{1}{2}$ auf einem Signifikanzniveau von 0.95 ab. Andernfalls lehnt man sie nicht ab.

71.3 Bemerkungen

- (a) Eine Hypothese an einen Parameter (etwa $p_0 = \frac{1}{2}$) nennt man auch Nullhypothese H_0 , die Gegenannahme (etwa $p \neq \frac{1}{2}$) ist die Gegenhypothese H_1 .

(b) Bei Hypothesentests können 2 Arten von Fehlern auftreten:

- **Fehler 1. Art:** Hypothese wird abgelehnt, obwohl sie richtig ist (wird durch Irrtumswahrscheinlichkeit α beschrieben).
- **Fehler 2. Art:** Hypothese wird nicht abgelehnt, obwohl sie falsch ist. Dieser Fehler kann insbesondere für kleines α sehr groß werden.

71.4 Der χ^2 -Test (Chi-Quadrat-Test)

Der χ^2 -Test ist einer der wichtigsten Tests. Er wird bei folgenden Problemen angewandt:

Ein Versuch habe m mögliche Ausgänge. Wir testen die Hypothese H_0 , dass die Resultate mit vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_m$ auftreten.

Trifft H_0 zu, erwarten wir bei n Versuchen als Häufigkeit für die einzelnen Ausgänge: $n \cdot p_1, \dots, n \cdot p_m$.

In Wirklichkeit werden die Häufigkeiten $X_1, \dots, X_m$ beobachtet. Als Maß für die Abweichung zwischen X_i und $n \cdot p_i$, $i = 1, \dots, m$ verwendet man

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^m \frac{(X_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Ist χ^2 „groß“, wird man H_0 ablehnen.

Wie sieht der Erwartungswert von χ^2 aus?

Ist jedes X_i b_{n,p_i} -verteilt, gilt

$$V(X_i) = E((X_i - n \cdot p_i)^2) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

und aus der Linearität des Erwartungswerts folgt:

$$\begin{aligned} E(\chi^2) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{np_i} E((X_i - np_i)^2) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{np_i} np_i (1 - p_i) \\ &= m - 1 \end{aligned}$$

$f := m - 1$ bezeichnet die Freiheitsgrade der χ^2 -Verteilung, d.h. $m - 1$ der p_i , $i = 1, \dots, m$ sind frei wählbar. Es gilt also

$$\mu = E(\chi^2) = f$$

Für einen gegebenen Freiheitsgrad f und eine Irrtumswahrscheinlichkeit α ist die χ_f^2 -Verteilung tabelliert.

Man nimmt H_0 an, falls der berechnete χ^2 -Wert $\leq \delta$ ist. Man lehnt H_0 ab, falls der berechnete χ^2 -Wert $> \delta$ ist.

71.5 Beispiel

Wir wollen mit 120 Würfeln nachprüfen, ob ein Würfel „fair“ ist, d.h. alle Augenzahlen sind gleichwahrscheinlich.

$$p_1 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$$

Als Ergebnis erhalten wir:

Augenzahl i	1	2	3	4	5	6
bbeobachtete Häufigkeit X_i	15	21	25	19	14	26
erwartete Häufigkeit np_i	20	20	20	20	20	20

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(21 - 20)^2}{20} + \dots + \frac{(26 - 20)^2}{20} \\ &\approx 6.2\end{aligned}$$

Geben wir eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.1$ vor, so findet man in einer Tabelle für $f = 6 - 1 = 5$ Freiheitsgrade.

$$p(\chi^2 \leq \underbrace{9.24}_{\delta}) = \underbrace{0.9}_{1-\alpha}$$

Wegen $\chi^2 = 6.2 \leq 9.24 = \delta$ akzeptieren wir die Hypothese H_0 , dass alle Augenzahlen gleichwahrscheinlich sind.

71.6 Bemerkung:

Möchte man ein $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung mit dem χ^2 -Test für ein gegebenes μ, σ^2 verifizieren, teilt man in m (z.B. gleich wahrscheinliche) Klassen ein:

Beispiel: $m = 3$ Klassen.

Dann überprüft man, ob die experimentell ermittelten Häufigkeiten in jeder Klasse das χ^2 -Kriterium zu einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α und $f = m - 1$ Freiheitsgrade erfüllen.