

§70: PARAMETERSCHÄTZUNG UND KONFIDENZINTERVALLE

70.1 Motivation

Bisher sind wir stets von theoretischen Modellen (z.B. „fairer Würfel“) ausgegangen, die erlauben, Parameter wie Erwartungswert oder Varianz einer Verteilung exakt zu berechnen. In vielen realen Situationen kennt man jedoch nur den Verteilungstyp und muss auf Grund von Stichproben die Parameter schätzen. Wie geht man dabei vor?

Die geschätzten Parameter sind i.A. Fehler behaftet. Lässt sich ein Vertrauensintervall angeben, innerhalb dessen ein Parameter mit einer vorgegebenen Sicherheit liegt?

70.2 Def.:

Gegeben seien n Beobachtungswerte $x_1, \dots, x_n$ eines Zufallsexperiments. Dann nennen wir $(x_1, \dots, x_n)^T$ Stichprobe vom Umfang n . Die einzelnen x_i heißen Stichprobenwerte.

70.3 Beispiel:

In einer Kiste befinden sich 10000 Schrauben. Ein Teil davon ist fehlerhaft. Für eine Stichprobe werden 100 Schrauben entnommen. Die Zufallsvariable X_i beschreibt den Zustand der i -ten entnommenen Schraube:

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i\text{-te Schraube in Ordnung} \\ 1 & \text{falls } i\text{-te Schraube fehlerhaft} \end{cases}$$

Eine konkrete Realisierung des Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_{100})^T$ liefere eine Stichprobe $(x_1, \dots, x_n)^T = (0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)^T$. So wie wir bei den Zufallsvariablen Parameter wie Erwartungswert oder Varianz bestimmt haben, können wir auch für Stichproben entsprechende Kerngrößen definieren.

70.4 Def.:

Für eine Stichprobe $(x_1, \dots, x_n)^T$ definiert man:

- den Mittelwert (arithmetisches Mittel) durch:

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- die Varianz durch:

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- die Standardabweichung durch:

$$s := \sqrt{s^2}$$

70.5 Bemerkungen:

- (a) Man kann zeigen, dass der Mittelwert $\bar{x}$ und die Varianz s^2 einer Stichprobe geeignete Approximationen an den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 einer Zufallsvariablen sind.
- (b) Die Tatsache, dass im Nenner von s^2 die Größe $n-1$ statt n steht, hat tiefere theoretische Gründe, auf die wir hier nicht eingehen (siehe z.B. Hartmann, Satz 21.9).
- (c) Ähnlich zum Verschiebungssatz 65.12 gibt es eine häufig benutzte Formel zum Berechnen der Varianz einer Stichprobe:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{n\bar{x}} + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \end{aligned}$$

□

70.6 Beispiel:

Bei einer Wahlumfrage geben 400 von 1000 Personen an, Partei A wählen zu wollen. Das Umfrageinstitut prognostiziert auf Grund dieser Stichprobe einen Wahlausgang mit 40% aller Stimmen für Partei A.

70.7 Konfidenzintervalle

In Beispiel 70.6 werden verschiedene Stichproben zu unterschiedlichen Resultaten führen, die wiederum vom tatsächlichen Wahlausgang abweichen.

Können wir statt eines einzelnen Werts $p = 0.4$ ein Vertrauensintervall (Konfidenzintervall) $[p_u, p_o]$ angeben, innerhalb dessen das Endresultat mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) von z.B. 95% liegt?

70.8 Beispiel: Wahlumfrage aus 70.6

Wir gehen von einer Binomialverteilung aus und schätzen p durch $p = \frac{400}{1000} = 0.4$ ab. Sei

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Befragte/r } i \text{ wählt A} \\ 0 & \text{Befragte/r } i \text{ wählt A nicht} \end{cases}$$

und $X := \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Dann gilt nach 67.4 mit $n = 1000$ und $p = 0.4$.

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = n \cdot p = 400 \\ \sigma^2 &= V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 240 \Rightarrow \sigma \approx 15.49\end{aligned}$$

Wegen $n \cdot p = 400 > 5$ und $n \cdot (1 - p) = 600 > 5$ können wir für X auch eine Normalverteilung annehmen mit $\mu = 400$ und $\sigma = 15.49$ annehmen. Wir suchen ein Intervall $[\mu - r\sigma, \mu + r\sigma]$, innerhalb dessen das Integral über die Dichtefunktion den Wert 0.95 annimmt.

Tabelliert ist die Standardnormalverteilung ($\mu = 0, \sigma = 1$)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Man findet:

$$\Phi(1.96) \approx 0.975$$

Somit ist aus Symmetriegründen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.96}^{1.96} e^{-\frac{u^2}{2}} du \approx 0.95$$

Somit ist $r = 1.96$. Damit ergibt sich das Konfidenzintervall

$$\begin{aligned}[\mu - r\sigma, \mu + r\sigma] &= [400 - 1.96 \cdot 15.49, 400 + 1.96 \cdot 15.49] \\ &\approx [369.6, 430.4]\end{aligned}$$

Bei einem Konfidenzniveau von 95% erzielt Partei A also zwischen 36.96% und 43.04% der Stimmen.

Möchte man ein kleineres Konfidenzintervall, muss man mehr Personen befragen.

70.9 Beispiel: Überbuchung eines Flugzeugs

Ein Flugzeug hat 200 Sitze. Wieviele Reservierungen dürfen angenommen werden, wenn erfahrungsgemäß 5% aller Passagiere nicht erscheinen? Die Fluggesellschaft ist bereit, in einem von 50 Fällen in Verlegenheit zu geraten.

Sei n die Anzahl der Reservierungen und X die Anzahl der tatsächlich erscheinenden Passagiere. Legt man eine Binomialverteilung zu Grunde, gilt:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = n \cdot p = 0.95 \cdot n \\ \sigma^2 &= V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \approx 0.0475 \cdot n \\ \sigma &\approx 0.2179\sqrt{n}\end{aligned}$$

Der Tabelle der Standardnormalverteilung entnimmt man:

$$\Phi(2.05) \approx 0.98 = 1 - \frac{1}{50}$$

Fordert man

$$\mu + 2.05 \cdot \sigma \leq 200$$

ergibt sich:

$$0.95 \cdot n + 2.05 \cdot 0.2179 \cdot \sqrt{n} \leq 200$$

Substituiert man $y = \sqrt{n}$, erhält man eine quadratische Gleichung in y . Als Lösung für n ergibt sich

$$n = 217.5$$

Man darf 217 Reservierungen annehmen.