

§57: EXTREMA VON FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN

57.1 Motivation:

Bei skalarwertigen Funktionen einer Variablen kennen wir notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Extrema (vgl. §25):

- (a) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, $\xi \in (a, b)$. Besitzt f in ξ ein lokales Extremum, so gilt $f'(\xi) = 0$.
- (b) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, $\xi \in (a, b)$ und $f'(\xi) = 0$.
Ist ξ ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum), so gilt $f''(\xi) \geq 0$ (bzw. $f''(\xi) \leq 0$).
Ist umgekehrt $f''(\xi) > 0$ (bzw. $f''(\xi) < 0$), so ist ξ ein striktes lokales Minimum (striktes lokales Maximum).

Können wir ähnliche Aussagen auch im Fall skalarwertiger Funktionen mehrerer Variablen machen?

57.2 Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $\xi \in D$ heißt lokales Minimum (bzw. lokales Maximum), falls eine Umgebung $U \subset D$ existiert mit $f(\xi) \leq f(y)$ (bzw. $f(\xi) \geq f(y)$) für alle $y \in U$. Tritt Gleichheit nur für $y = \xi$ auf, so heißt ξ striktes lokales Minimum (bzw. striktes lokales Maximum).

Damit lautet das Analogon zu 57.1 (a):

57.3 Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Hat f in ξ ein lokales Extremum (lokales Maximum oder lokales Minimum), so gilt $\nabla f(\xi) = 0$.

Beweis:

Für beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist $\varphi(t) := f(\xi + tv)$ in einer Umgebung von $t = 0$ erklärt und dort stetig differenzierbar. Ferner habe φ in $t = 0$ ein lokales Extremum. Mit 57.1 (a) und der Kettenregel 54.5 gilt:

$$0 = \varphi'(0) = \nabla^T f(\xi) \cdot v$$

Da dies für beliebiges $v \neq 0$ gilt, folgt $\nabla f(\xi) = 0$

□

57.4 Bemerkungen:

- (a) Ein Punkt $\xi \in D$ mit $\nabla f(\xi) = 0$ heißt auch stationärer Punkt von f .
- (b) Bei der Suche nach stationären Punkten muss man häufig ein nichtlineares System von n Gleichungen mit n Unbekannten lösen. Beispiel:

$$f(x, y) = e^{xy} - x^2 \sin(y)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla f = \begin{pmatrix} ye^{xy} + 2x \sin(y) \\ xe^{xy} + x^2 \cos(y) \end{pmatrix}$$

2 nichtlineare Gleichungen mit 2 Unbekannten.

Ähnlich wie bei Funktionen einer Variablen kann man hierbei Fixpunktiterationen oder Newton-artige Verfahren einsetzen.

- (c) Nicht jeder stationäre Punkt ist ein Extremum!

Beispiel:

Die stationären Punkte von $f(x, y) = x^2 - y^2$ erfüllen

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist einziger stationärer Punkt.

Zur Klassifikation stationärer Punkte betrachten wir das Analogon zu 57.1 (b):

57.5 Satz: (Klassifikation stationärer Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $\xi \in D$ sowie $\nabla f(\xi) = 0$. Dann gilt:

- (a) Notwendige Bedingung:

Ist ξ ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum), so ist die Hesse-Matrix $Hf(\xi)$ positiv semidefinit (bzw. negativ semidefinit).

- (b) Hinreichende Bedingung:

- (i) Ist $Hf(\xi)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so ist ξ ein striktes lokales Minimum (bzw. striktes lokales Maximum) von f .
- (ii) Ist $Hf(\xi)$ indefinit, so ist ξ ein Sattelpunkt, d.h. ein stationärer Punkt, sodass in jeder Umgebung $U \subset D$ Punkte $y, z \in U$ existieren mit $f(y) < f(\xi) < f(z)$.

Beweis:

- (a) Sei o.B.d.A. ξ ein lokales Minimum. Für $v \neq 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt nach Taylor (55.6):

$$0 \stackrel{\text{da lok. Min.}}{\leq} f(\xi + \varepsilon v) - f(\xi) = \underbrace{\nabla^T f(\xi)}_0 + \frac{1}{2} \varepsilon v^T Hf(\xi + \Theta \varepsilon v) \varepsilon v \quad \text{mit } \Theta \in (0, 1)$$

Also ist $v^T Hf(\xi + \Theta \varepsilon v) v \geq 0$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt: $v^T Hf(\xi) v \geq 0$. Da $v \neq 0$ beliebig war, ist $Hf(\xi)$ positiv semidefinit.

- (b) (i) Sei $Hf(\xi)$ positiv definit. Da f eine C^2 -Funktion ist, ist $Hf(x)$ dann auch in einer hinreichend kleinen Kreiseumgebung $K_\varepsilon(\xi)$ mit Radius ε und Mittelpunkt ξ positiv definit. Für $x \in K_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}$ gilt daher nach Taylor:

$$f(x) - f(\xi) = \underbrace{\nabla^T f(\xi)(x - \xi)}_0 + \underbrace{\frac{1}{2}(x - \xi)^T Hf(\xi + \Theta(x - \xi))(x - \xi)}_{>0}$$

mit $\Theta \in (0, 1)$.

Da $x \in K_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}$ beliebig war, folgt aus $f(x) - f(\xi) > 0$, dass ξ ein striktes lokales Minimum ist.

- (ii) Sei nun $Hf(\xi)$ indefinit. Dann ex. Eigenwerte λ, μ von $Hf(\xi)$ mit $\lambda > 0, \mu < 0$. Für die entsprechenden Eigenvektoren v, w gilt also:

$$v^T Hf(\xi)v > 0$$

$$w^T Hf(\xi)w < 0$$

Wie in (a) zeigt man, dass es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ gibt mit

$$f(\xi + \varepsilon v) - f(\xi) = \frac{1}{2}\varepsilon v^T Hf(\xi + \Theta_1 \varepsilon v)\varepsilon v > 0$$

$$f(\xi + \varepsilon w) - f(\xi) = \frac{1}{2}\varepsilon w^T Hf(\xi + \Theta_2 \varepsilon w)\varepsilon w < 0$$

für geeignete $\Theta_1, \Theta_2 \in (0, 1)$ und für alle $\varepsilon \in (0, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$.
Somit ist ξ Sattelpunkt von f .

□

57.6 Bemerkung:

Nach Satz 57.5 gelten also folgende Implikationen.

$$\begin{array}{ccc} \xi \text{ lok. Minimum} & \Longleftarrow & \xi \text{ striktes lok. Minimum} \\ \text{pfeilrunter} & & \text{pfeilhoch} \\ Hf(\xi) \text{ pos. semidefinit} & \Longleftarrow & Hf(\xi) \text{ pos. definit} \end{array}$$

Keine dieser Implikationen ist umkehrbar!

57.7 Beispiel:

$$f(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3x^2 + 2x \\ 2y(x - 1) \end{pmatrix}$$

stationäre Punkte: $0 \stackrel{!}{=} \nabla f(x, y) \Rightarrow 2y(x - 1) = 0$

Fall 1: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Einsetzen in $y^2 + 3x^2 + 2x = 0$ liefert: $y^2 + 5 = 0$.

Keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Fall 2: $y = 0$.

Einsetzen in $y^2 + 3x^2 + 2x = 0$ liefert:

$$x(3x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{3}$$

Es gibt also 2 stationäre Punkte:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Klassifikation:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2 & 2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt in } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \text{negativ definit} \Rightarrow \text{striktes Maximum } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$