

§47: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN SYMMETRISCHER MATRIZEN

47.1. Motivation: Symmetrische Matrizen, d.h. Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$, kommen in der Praxis sehr häufig vor. Gibt es in diesem Fall besonders einfache Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren?

47.2. Satz (Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen):

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

a) Sämtliche Eigenwerte sind reell.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:

a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $\bar{z}$ die komplex konjugierte Zahl $x - iy$. Dann ist $z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Für Vektoren und Matrizen definiert man die komplexe Konjugation komponentenweise. Sei nun λ Eigenwert von A zum Eigenvektor v .

$$\Rightarrow \bar{\lambda} \bar{v}^T = \overline{(\lambda v)}^T v = \overline{(Av)}^T v$$

$$= \bar{v}^T \bar{A}^T v$$

$$= \bar{v}^T A v, \text{ da } A \text{ reell und symmetrisch ist}$$

$$= \bar{v}^T \lambda v$$

$$= \lambda \bar{v}^T v$$

Da $\bar{v}^T v \in \mathbb{R}$ und $\neq 0$ (Eigenvektoren sind $\neq 0$), ist $\bar{\lambda} = \lambda$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Seien v_1, v_2 Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 . $\Rightarrow$

$$\lambda_1 v_1^T v_2 = (Av_1)^T v_2$$

$$= v_1^T A^T v_2$$

$$= v_1^T (Av_2) \text{ da } A \text{ symmetrisch}$$

$$= v_1^T (\lambda_2 v_2)$$

$$= \lambda_2 v_1^T v_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1^T v_2 = 0 \text{ Also sind } v_1 \text{ und } v_2 \text{ orthogonal.}$$

□

47.3 Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ symmetrisch.

Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 \\ &= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ zwei reelle Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ linear abhängige Gleichungen} \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}$$

$$x_2 := s \Rightarrow x_1 = -2x_2 = -2s$$

$$\text{Eigenraum: } \left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenvektor: z.B. } v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 5$:

$$(A - \lambda_2 I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ linear abhängige Gleichungen} \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{array}$$

$$x_1 := s \Rightarrow x_2 = 2s$$

$$\text{Eigenraum: } \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenvektor: z.B. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v_1 und v_2 sind orthogonal.

Symmetrische Matrizen lassen sich mit Hilfe ihrer Eigenwerte und Eigenvektoren elegant zerlegen:

47.4 Satz: (Hauptachsentransformation, Spektraldarstellung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Nach Satz 47.2 hat A ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ mit zugehörigen (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist

$$A = Q \Lambda Q^T$$

mit der orthogonalen Matrix $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ und der Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

Nach Satz 47.2 sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Verwendet man innerhalb jedes Eigenraums das Gram-Schmidt-Verfahren und

normiert, entsteht ein Orthonormalsystem $\{v_1, \dots, v_n\}$ von Eigenvektoren von A . Somit ist $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ eine orthogonale Matrix. Die k -te Spalte von $Q^T A Q$ lautet:

$$Q^T \underbrace{A v_k}_{\lambda_k v_k} = \lambda_k Q^T v_k = \lambda_k e_k \text{ mit } e_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Stelle}$$

Somit ist

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

□

47.5 Bemerkungen:

(a)

Das bedeutet, dass A auf Diagonalgestalt transformiert werden kann:

$$\Lambda = Q^T A Q$$

(Durch den Übergang in das durch $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ definierte Koordinatensystem hat A eine besonders einfache Gestalt.)

(b)

A lässt sich auch schreiben als

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \dots + \lambda_n v_n v_n^T$$

An dieser Schreibweise erkennt man sofort, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte und $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren von A sind, denn

$$A v_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \underbrace{v_i^T v_k}_{= \begin{cases} 0, \text{ für } i \neq k \\ 1, \text{ für } i = k \end{cases}} = \lambda_k v_k$$

47.6 Beispiel:

Wir bestätigen Satz 47.5, indem wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ auf Diagonalgestalt transformieren. Nach Beispiel 47.3 hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$ mit zugehörigen Eigenvektoren $w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Normierung der Eigenvektoren ergibt:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}w_1 \text{ und } v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}w_2.$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

wie nach Satz 47.5 (a) zu erwarten war.