

## §69: MULTIVARIABLE VERTEILUNGEN UND SUMMEN VON ZUFALLSVARIABLEN

### 69.1 Motivation

Manchmal möchte man das Zusammenwirken mehrerer Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  studieren. Gibt es in diesem „multivariablen“ Fall Aussagen über die gemeinsame Verteilung? Lassen sich Aussagen über die Verteilung der Summe von Zufallsvariablen treffen?

### 69.2 Wichtige Definitionen

Mehrere Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  lassen sich in einem Vektor zusammenfassen  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  zusammenfassen. Im kontinuierlichen Fall ist die resultierende Dichte eine Funktion mehrerer Variablen. Für diese gemeinsame Dichte gilt:

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = 1$$

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$$

Statt des Erwartungswerts betrachtet man den Erwartungsvektor

$$\mu = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

und fasst Varianzen und Kovarianzen zusammen zur Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ \text{cov}(X_n, X_1) & & & \text{var}(X_n) \end{pmatrix}$$

Sie ist symmetrisch und positiv definit.

Die wichtigste multivariable Verteilung ist die multivariable Normalverteilung ( $N_n(\mu, \Sigma)$ -Verteilung). Ist  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  ein Vektor von normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswertvektor  $\mu = (E(X_1), \dots, E(X_n))^T$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$ , dann besitzt die multivariable Normalverteilung die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Sie spielt beispielsweise eine große Rolle im Bereich des maschinellen Lernens.

### 69.3 Beispiel:

Eine Apfelbaumplantage mit gleich alten Bäumen werde durch 3 Zufallsvariablen charakterisiert:

$X_1$ : Höhe eines Baumes [m]  $N(4, 1)$ -verteilt

$X_2$ : Ertrag eines Baumes [1 kg]  $N(20, 100)$ -verteilt

$X_3$ : Zahl der Blätter [1000 Stück]  $N(20, 225)$ -verteilt

Diese Zufallsvariablen seien korreliert mit

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = 9$$

$$\text{Cov}(X_1, X_3) = 12.75$$

$$\text{Cov}(X_2, X_3) = 120$$

Dann liegt eine  $N_3(\mu, \Sigma)$ -Verteilung vor mit

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 12.75 \\ 9 & 100 & 120 \\ 12.75 & 120 & 225 \end{pmatrix}$$

Kann man unter geeigneten Voraussetzungen die gemeinsame Dichte  $f(x_1, \dots, x_n)$  aus den einzelnen Dichten  $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$  berechnen? Man kann zeigen:

### 69.4 Satz: (Gemeinsame Dichte von unabhängigen Zufallsvariablen)

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige (!) Zufallsvariablen mit Dichten  $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ .

Dann hat  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  die gemeinsame Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) \quad (*)$$

Hat umgekehrt  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  eine gemeinsame Dichte mit Produktdarstellung (\*), so sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig.

### 69.5 Beispiel

Zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  seien  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ - bzw.  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -verteilt.

Da Unabhängigkeit nach 65.22(e) Unkorreliertheit impliziert, hat die Kovarianzmatrix Diagonalgestalt:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Mit

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$

und

$$\det \Sigma = \sigma_1^2 \sigma_2^2$$

liegt eine multivariable Normalverteilung für  $X = (X_1, X_2)^T$  vor mit Dichte

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[(x_1-\mu_1)^2\frac{1}{\sigma_1^2} + (x_2-\mu_2)^2\frac{1}{\sigma_2^2}\right]} \quad (\text{vgl. 69.2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \end{aligned}$$

Dies ist gerade das Produkt der zwei Einzeldichten  $f_1(x_1)$  und  $f_2(x_2)$ .  
Gibt es Aussagen über die Dichte, wenn man die Summe zweier Zufallsvariablen betrachtet? Hierzu benötigen wir

69.6 Def.:

Falls für die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Integral

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

existiert, so nennen wir  $f * g$  die Faltung von  $f$  und  $g$  (engl.: convolution).

69.7 Satz: (Summe unabhängiger kontinuierlicher Zufallsvariablen)

Seien  $X_1, X_2$  unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen mit Dichten  $f_1, f_2$ .  
Dann hat  $X_1 + X_2$  die Dichte  $f_1 * f_2$ .

Beweis:

Mit  $B := \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leq s\}$  ergibt sich für die Verteilung von  $X_1 + X_2$ :

$$P(X_1 + X_2 \leq s) = \int \int_B \underbrace{f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)}_{\text{Unabhängigkeit}} dx_1 dx_2$$

Mit der Substitution  $u := x_1 + x_2$  folgt:

$$P(X_1 + X_2 \leq s) = \int_{-\infty}^s \left( \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u-x_2)f_2(x_2)dx_2}_{(f_1*f_2)(u)} \right) du \quad \square$$

Hiermit lässt sich beweisen:

69.8 Satz: (Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen)

Seien  $X_1, X_2$  unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen mit  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ - bzw.  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -Verteilung. Dann ist  $X = X_1 + X_2$   $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ -verteilt.

Auch im Fall diskreter Zufallsvariablen gibt es vergleichbare Aussagen zu 69.6 bis 69.8:

69.9 Def.:

Für  $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}, g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  definiert man die diskrete Faltung von  $f$  und  $g$  durch

$$(f * g)_i := \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j} g_j$$

69.10 Satz: (Summe unabhängiger diskreter Zufallsvariablen)

Seien  $X_1, X_2$  unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit Verteilungen  $P_{X_1}, P_{X_2}$ .

Dann  $X_1 + X_2$  die Verteilung  $P_{X_1} * P_{X_2}$ , wobei  $*$  die diskrete Faltung bezeichnet.

69.11 Satz: (Summe unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen)

Seien  $X_1, X_2$  unabhängige diskrete Zufallsvariablen, die einer Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  genügen (kurz:  $P(\lambda_1)$ -,  $P(\lambda_2)$ -verteilt). Dann ist  $X_1 + X_2$   $p(\lambda_1 + \lambda_2)$ -verteilt.