

§46: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

46.1 Motivation

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind v und Av normalerweise nicht parallel. Gibt es ausgezeichnete Richtungen v , für die v und Av parallel sind?

46.2 Def.:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ein von 0 verschiedener (!) Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Eigenvektor von A , falls es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$Av = \lambda v$$

Der Skalar λ heißt dann Eigenwert von A .

46.3 Bedeutung von Eigenvektoren und Eigenwerten

Eigenvektor- bzw. Eigenwertprobleme sind wichtig in der Statik, Elektrotechnik, Maschinenbau, Biologie, Informatik und den Wirtschaftswissenschaften. Oft beschreiben sie besondere Zustände von Systemen.

Beispiel:

1831 haben Soldaten eine Brücke zum Einsturz gebracht, indem sie mit einer Frequenz maschiert sind, die einen Eigenwert des Brückensystems getroffen hat. Es kam zur Resonanzkatastrophe. Seitdem geht man nicht mehr im Gleichschritt über Brücken.

46.4 Beispiel

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ hat einen Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot v$$

Wie kann man Eigenwerte bestimmen?

46.5 Bestimmung von Eigenwerten

Aus $Av = \lambda v$ folgt $(A - \lambda I)v = 0$.

$v = 0$ ist als Eigenvektor ausgenommen, da stets $A \cdot 0 = 0$ ist.

Wir suchen also nichttriviale Lösungen von $(A - \lambda I)v = 0$. Sie existieren nur für $\text{rang}(A - \lambda I) < n$, d.h. für

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dies ein Polynom n -ten Grades in λ (charakteristisches Polynom von A). Seine Nullstellen sind die gesuchten Eigenwerte.

46.6 Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 \\ &= 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 4 \\ \Rightarrow \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

46.7 Bemerkungen

(a)

Selbst wenn A nur reelle Einträge hat, kann das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen besitzen. Komplexe Eigenwerte sind also nicht ungewöhnlich.

(b)

Sucht man Eigenwerte einer $(n \times n)$ -Matrix A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms, kann dies für $n \geq 3$ unangenehm werden. Für $n \geq 5$ ist dies i.A. nicht mehr analytisch möglich. Dann werden numerische Approximationen benötigt (ebenfalls nicht ganz einfach).

(c)

Mann kann zeigen, dass $\det A$ das Produkt der Eigenwerte ist und dass A genau dann invertierbar ist, wenn kein Eigenwert 0 auftritt.

Das charakteristische Polynom ist in Spezialfällen sehr nützlich, z.B. bei Dreiecksmatrizen:

46.8 Def.:

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A heißt obere Dreiecksmatrix (untere Dreiecksmatrix), falls $a_{ij} = 0$ für $i > j$ ($i < j$) ist. Ist a_{ij} für alle $i \neq j$, so ist A eine Diagonalmatrix.

46.9 Beispiele:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist obere Dreiecksmatrix}$$

(b)

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist Diagonalmatrix und damit auch obere/untere Dreiecksmatrix.

46.10 Satz: (Eigenwerte von Dreiecksmatrizen)

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so sind die Eigenwerte durch die Diagonaleinträge gegeben.

Beweis:

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

Für $A = (a_{ij})$ folgt also aus

$$0 = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda)$$

dass die Eigenwerte durch $\lambda_1 = a_{11}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$ gegeben sind.

46.11 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ (vgl. Beispiel 46.4).

Wie kann man Eigenvektoren berechnen?

46.12 Bestimmung der Eigenvektoren

Ann.: ein Eigenwert λ der Matrix A sei bekannt. Dann sind die Eigenvektoren zu λ die nichttrivialen Lösungen von $(A - \lambda I)v = 0$ (*). Eigenvektoren sind nicht eindeutig bestimmt:

Mit v ist auch αv für $\alpha \neq 0$ Eigenvektor ($\alpha \in \mathbb{R}$). Der Lösungsraum von (*) heißt Eigenraum von A zum Eigenwert λ . Man sucht daher nach Basisvektoren im Eigenraum und gibt diese als Eigenvektoren an.

46.13 Beispiel

Bestimme die Basen der Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \dots = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

(i)

Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$ ist Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 linear abhängige Gleichungen mit der Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ -t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine basis dieses 2-dim. Eigenraums ist z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(ii)

Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$ ist die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. und 3. Gleichung sind linear abhängig. Addition von Gleichung 1 und 2:

$$x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_3 = s$$

in Gleichung 3:

$$x_1 = -2x_3 = -2s$$

eindimensionaler Eigenraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

wird z.B vom Basisvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

46.14 Satz: (Eigenwerte von Potenzen einer Matrix)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathbb{N}$ und λ sei Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor v .
Dann ist λ^k Eigenwert von A^k mit zugehörigem Eigenvektor v .

Beweis:

$$\begin{aligned} A^k v &= A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1}v \\ &= \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda^2 A^{k-2}v = \dots = \lambda^k v \end{aligned}$$

□

46.15 Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dann hat A die Eigenwerte 1 und 2 (vgl. Beispiel 46.13).

Somit hat A^7 die Eigenwerte $1^7 = 1$ und $2^7 = 128$.