

55.5 Motivation zur Taylorentwicklung

Eine einmal differenzierbare Funktion lässt sich lokal durch eine lineare Funktion (d.h. ein Polynom 1. Grades) approximieren. Wir wollen nun eine m -fach differenzierbare Funktion durch ein Polynom m -ten Grades annähern. Dazu verallgemeinern wir den Satz von Taylor auf skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen. Zur Erinnerung hier noch einmal der Satz von Taylor für skalarwertige Funktionen einer Variablen (vgl. 24.2).

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $\xi \in (a, b)$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{m+1} -Funktion. Dann gilt die folgende Taylorentwicklung um ξ :

$$f(x) = \underbrace{T_m(x, \xi)}_{\text{Taylorpolynom } m\text{-ten Grades}} + \underbrace{R_m(x, \xi)}_{\text{Restglied nach Lagrange}}$$

mit

$$T_m(x, \xi) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (x - \xi)^k f^{(k)}(\xi)$$

$$R_m(x, \xi) = \frac{1}{(m+1)!} (x - \xi)^{m+1} f^{(m+1)}(\xi + \Theta(x - \xi)) \quad \text{mit } \Theta \in (0, 1)$$

$m = 0$ schließt den Mittelwertsatz ein.

55.6 Satz: (Satz von Taylor)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{m+1} -Funktion. Dann lautet die Taylorentwicklung um ξ :

$$f(x) = \underbrace{T_m(x, \xi)}_{\text{Taylorpolynom } m\text{-ten Grades}} + \underbrace{R_m(x, \xi)}_{\text{Lagrange-Restglied}}$$

mit

$$T_m(x, \xi) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} [(x - \xi)^T \nabla]^k f|_{\xi}$$

$$R_m(x, \xi) = \frac{1}{(m+1)!} [(x - \xi)^T \nabla]^{m+1} f|_{\xi + \Theta(x - \xi)} \quad \text{mit } \Theta \in (0, 1)$$

55.7 Erläuterungen

$$[(x - \xi)^T \nabla]^k = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \partial_{x_i} \right]^k$$

Dieser Ausdruck wird formal ausmultipliziert und nach den partiellen Ableitungen sortiert.

Beispiel für $n = 2$:

$$\begin{aligned}
[(x - \xi)^T \nabla]^0 f|_{\xi} &= f(\xi) \\
[(x - \xi)^T \nabla]^1 f|_{\xi} &= (x_1 - \xi_1) f_{x_1}(\xi) + (x_2 - \xi_2) f_{x_2}(\xi) \\
[(x - \xi)^T \nabla]^2 f|_{\xi} &= [(x_1 - \xi_1) \partial_{x_1} + (x_2 - \xi_2) \partial_{x_2}]^2 f|_{\xi} \\
&= (x_1 - \xi_1)^2 f_{x_1 x_1}(\xi) + 2(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) f_{x_1 x_2}(\xi) + (x_2 - \xi_2)^2 f_{x_2 x_2}(\xi) \\
&= (x - \xi)^T H f(\xi) \cdot (x - \xi) \quad \text{quadratische Form zur Hesse-Matrix}
\end{aligned}$$

55.8 Beweis des Satzes von Taylor

Ähnlich wie beim Mittelwertsatz 55.2 verwenden wir eine Umparametrisierung, mit der man den Satz von Taylor für Funktionen einer Variablen anwenden kann:

$$\varphi(t) = f(x(t)) = f\left(\underbrace{\xi + t(x - \xi)}_{\in D \text{ für } -\varepsilon_1 < t < \varepsilon_2, \text{ da } D \text{ offen und konvex}}\right)$$

Damit gilt für ein $\Theta \in (0, 1)$:

$$(*) \quad f(x) = \varphi(1) \stackrel{24.2}{=} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\Theta)$$

Wie kann man $\varphi^{(k)}(t)$ durch partielle Ableitungen von f ausdrücken?

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= [(x - \xi)^T \nabla]^0 f|_{\xi+t(x-\xi)} \\
\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi + t(x - \xi))(x_i - \xi_i) \quad \text{Kettenregel 54.5} \\
&= [(x - \xi)^T \nabla]^1 f|_{\xi+t(x-\xi)} \\
\varphi''(t) &= \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi + t(x - \xi))(x_j - \xi_j) \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \partial_{x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n (x_j - \xi_j) \partial_{x_j} \right) f|_{\xi+t(x-\xi)} \\
&= [(x - \xi)^T \nabla]^2 f|_{\xi+t(x-\xi)}
\end{aligned}$$

Mit vollst. Induktion folgt:

$$\varphi^{(k)}(t) = [(x - \xi)^T \nabla]^k f|_{\xi+t(x-\xi)}$$

Einsetzen in $(*)$ liefert:

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} [(x - \xi)^T \nabla]^k f|_{\xi} + \frac{1}{(m+1)!} [(x - \xi)^T \nabla]^{m+1} f|_{\xi+\Theta(x-\xi)}$$

□

55.9 Beispiel

Berechne das Taylorpolynom $T_2(x, \xi)$ zweiten Grades von

$$f(x, y, z) = xy^2 \sin(z) \quad \text{im Entwicklungspunkt } \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_2(x, \xi) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} [(x - \xi)^T \nabla]^k f|_{\xi} \\ &= f(\xi) + (x - 1)f_x(\xi) + (y - 2)f_y(\xi) + zf_z(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(x - 1)^2 f_{xx}(\xi) + (y - 2)^2 f_{yy}(\xi) + z^2 f_{zz}(\xi) \\ &\quad + 2(x - 1)(y - 2)f_{xy}(\xi) + 2(x - 1)zf_{xz}(\xi) + 2(y - 2)zf_{yz}(\xi)] \end{aligned}$$

Ableitungen	Auswertung in $\xi = (1, 2, 0)^T$
$f(x, y, z) = xy^2 \cdot \sin(z)$	0
$f_x(x, y, z) = y^2 \cdot \sin(z)$	0
$f_y(x, y, z) = 2xy \cdot \sin(z)$	0
$f_z(x, y, z) = xy^2 \cdot \cos(z)$	4
$f_{xx}(x, y, z) = 0$	0
$f_{yy}(x, y, z) = 2x \cdot \sin(z)$	0
$f_{zz}(x, y, z) = -xy^2 \cdot \sin(z)$	0
$f_{xy}(x, y, z) = 2y \cdot \sin(z)$	0
$f_{xz}(x, y, z) = y^2 \cdot \cos(z)$	4
$f_{yz}(x, y, z) = 2xy \cdot \cos(z)$	4

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_2(x, \xi) &= z \cdot 4 + \frac{1}{2}(2(x - 1)z \cdot 4 + 2(y - 2)z \cdot 4) \\ &= z(4 + 4(x - 1) + 4(y - 2)) \\ &= -8z + 4xz + 4yz \end{aligned}$$

55.10 Bemerkungen:

(a) Für $n = 0$ liefert der Satz von Taylor:

$$f(x) = \underbrace{f(\xi)}_{T_0(x, \xi)} + \underbrace{(x - \xi)^T \nabla f(\xi + \Theta(x - \xi))}_{R_0(x, \xi)}$$

Dies ist äquivalent zum Mittelwertsatz 55.2 für $a = \xi, b = x$:

$$f(x) - f(\xi) = \nabla^T f(\xi + \Theta(x - \xi))(x - \xi)$$

Der Mittelwertsatz ist also ein Spezialfall des Satzes von Taylor.

(b) Mit Hilfe der Hesse-Matrix

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_1 x_n} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

lässt sich das Taylorpolynom 2. Grades darstellen als

$$T_2(x, \xi) = f(\xi) + (x - \xi)^T \nabla f(\xi) + \frac{1}{2} (x - \xi)^T Hf(\xi) (x - \xi) \quad (\text{vgl. Erläuterung 55.7})$$

(c) Für beschränkte partielle Ableitungen der Ordnung $m + 1$ hat das Restglied die Fehlerordnung $\mathcal{O}(|x - \xi|^{m+1})$. Somit folgt für die Approximationsgüte des Taylorpolynoms:

$$f(x) = T_m(x, \xi) + \mathcal{O}(|x - \xi|^{m+1})$$

(d) Mit $h = x - \xi$ lautet eine Alternativschreibweise des Satzes von Taylor:

$$f(\xi + h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (h^T \nabla)^k f|_{\xi} + \frac{1}{(m+1)!} (h^T \nabla)^{m+1} f|_{\xi + \Theta h}$$

mit $\Theta \in (0, 1)$.