

10. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

- a) Auf seiner 17. Reise bestückt Ion Tichy ein Motherboard eines Rechners auf seinem Raumschiffe mit sehr preiswerten Chips, die auf dem Niedriglohnplaneten Murksus produziert wurden. Der niedrige Preis hat einen Grund: Die Chips haben eine absolute Lebensdauer von maximal 500 Tagen. Schlimmer noch: Die Wahrscheinlichkeit, dass sie am 1. Tag ausfallen, ist genau so hoch wie an jedem anderen Tag $m \leq 500$. Das Motherboard geht aber nur kaputt, wenn mindestens 2 Chips am gleichen Tag ausfallen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit des Versagens des Motherboards, wenn es mit $n < 500$ Chips bestückt wird?
- b) Ion Tichy nimmt an einer intergalaktischen Spielshow teil. Hinter einer von drei verschlossenen Türen ist ein heißbegehrtes "Elektronengehirn" verborgen. Ion Tichy darf eine Tür wählen, aber bevor sie geöffnet wird, macht der Showmaster eine der beiden anderen Türen auf: Eine ausgeglühte alte Niete kommt zum Vorschein. Ion Tichy darf nun noch einmal wählen zwischen den beiden geschlossenen Türen. Sollte Ion Tichy bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben oder sich umentscheiden, um seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren?

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Sie haben Ihre 8-stellige Geheimzahl für Ihren Computer vergessen. Also probieren Sie völlig zufällig und unsystematisch 8-stellige Zahlen aus, bis Sie Ihre Geheimzahl erraten haben. Was ist die erwartete Anzahl von Versuchen, die Sie dafür benötigen?

Aufgabe 3: (3+1 Punkte)

Ein Nachrichtenkanal empfängt eine anscheinend zufällige Folge von Nullen und Einsen (d.h. $P_{X_k}(0) = P_{X_k}(1) = \frac{1}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wenn die Zufallsvariable X_k die Ziffer an der k -ten Stelle

angibt). Es sei S_n die Anzahl der Einsen in einer derartigen Folge der Länge n . Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Anzahl der Einsen $\frac{S_n}{n}$ von $\frac{1}{2}$ um weniger als 0.1 abweicht, nach unten ab, wenn a) $n = 100$ und b) n gegen $+\infty$ strebt.

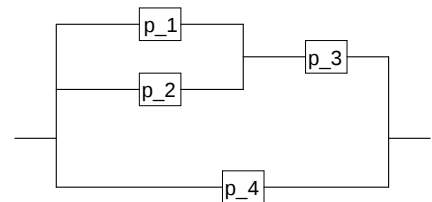
Aufgabe 4: (3+3 Punkte)

Bei einem Bildschirm mit 1024×1280 Pixeln hat jedes Pixel i eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 10^{-6} . Geben Sie obere Schranken für die Wahrscheinlichkeit an, dass bei diesem Bildschirm mehr als 6 Pixel kaputt sind, wenn Sie

a) die einfache Markow-Ungleichung und b) die Abschätzung von Chernoff anwenden.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

In der Aufnahmeprüfung zur Sternenakademie müssen die Kandidaten die Zuverlässigkeit der nebenstehenden Schaltung innerhalb von 5 Sekunden im Kopf berechnen, wenn für die Zuverlässigkeiten $p_1 = \frac{6}{10}$, $p_2 = \frac{7}{10}$, $p_3 = \frac{8}{10}$ und $p_4 = \frac{9}{10}$ gilt.



- a) Sie haben eine Woche Zeit und müssen schriftlich arbeiten.
- b) Spock baut eine Parallelschaltung von n identischen Relais auf, deren Zuverlässigkeit p_i jeweils $\frac{1}{n}$ ($i = 1, \dots, n$) beträgt (also von der Anzahl n abhängt). Er behauptet, dass die Zuverlässigkeit der ganzen Schaltung gegen 1 strebt, wenn n gegen $+\infty$ geht, obwohl die Zuverlässigkeit der einzelnen Relais gegen Null tendiert. Hat er recht? Berechnen Sie den Grenzwert.

Abgabetermin: Freitag, 2. 7. 2004 vor der Vorlesung