

8. Übung zur Mathematik für Informatiker II

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extrema der auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2) e^{-x^2 - 4y^2}.$$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Finden Sie das Maximum der Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n},$$

wenn die Zahlen $x_1, \dots, x_n$ positiv sind und $\sum_{i=1}^n x_i = c$ erfüllen, mit einer Konstanten $c > 0$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie Kandidaten für Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

auf der Schnittmenge der Ebene $x - y + z = 1$ und dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung zu dem Variationsproblem

$$I(y(x)) := \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ her. Zeigen Sie, dass Geraden $y(x) = cx + d$ diese Differenzialgleichung erfüllen.

Bemerkung: Wie sie aus den Vorlesungen über Kurvenintegrale und Bogenlänge wissen, beschreibt das zu minimierende Funktional $I(y(x))$ gerade die euklidische Länge der Kurve

der Funktion $y(x)$ über dem Intervall $[a, b]$. Dass lineare Funktionen die Differenzialgleichung erfüllen, beweist, dass Geraden Kurven minimaler Länge zwischen ihren Endpunkten sind.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Berechnen Sie das vom Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit $a, b, c > 0$ eingeschlossene Volumen.

Abgabetermin: Freitag, 18. 6. 2004 vor der Vorlesung