

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 9
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

A: Ein bestimmter Informatiker muss auf alle Fälle im Ausschuss sein.

$$|A| = \binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} = \frac{6! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 3!} = 150$$

B: Jeder Mathematiker und jeder Informatiker kann im Ausschuss vertreten sein.

$$|B| = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{5! \cdot 7!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4!} = 350$$

C: Zwei bestimmte Mathematiker dürfen nicht mehr dem zukünftigen Ausschuss angehören.

$$|C| = \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 105$$

Aufgabe 2

Seien $A := \{x_1, \dots, x_n\}$ und $B := \{y_1, \dots, y_n\}$.

1. Bijektive Abbildungen $f : A \rightarrow B$ kann es nur für $m = n$ geben. Also:

$$f : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$$

Ordnet man jedem $x_1, \dots, x_n \in A$ nacheinander je einen der Werte $y_1, \dots, y_n \in B$ zu, so gilt:

$f(x_1)$ kann auf n Arten festgelegt werden, $f(x_2)$ noch auf $(n-1)$ Arten usw.

Für $f(x_n)$ bleibt schließlich noch ein Wert aus B übrig.

$\Rightarrow$ es gibt insgesamt $n!$ bijektive Abbildungen $f : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$

2. Betrachte alle Abbildungen $f : A \rightarrow B$.

Jedem $x_i \in A = \{x_1, \dots, x_n\}$ kann jeder Wert $y_k \in B = \{y_1, \dots, y_m\}$ zugeordnet sein.

Für jedes $i = 1, \dots, n$ kann $f(x_i)$ auf n Arten festgelegt werden.

$\Rightarrow$ es gibt insgesamt $\underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n\text{-mal}} = m^n$ Abbildungen $f : A \rightarrow B$

□

Aufgabe 3

Gesucht: Anzahl der verschiedenen Programme der Länge $n = 0, 1, \dots$ aus der 3-elementigen Menge $M := \{\circ, \diamond, \square\}$ mit vorgegebenen Beschränkungen (Wiederholungen) und zwar:

$\circ$ darf 0, 1 oder 3 mal vorkommen.

$\diamond$ darf 1 oder 2 mal vorkommen.

$\square$ darf genau 1 mal vorkommen.

Bestimme zunächst die Anzahl der Kombinationen der Menge $\{\circ, \diamond, \square\}$ mit den oben angegebenen Beschränkungen:

Element	Beschränkung	Polynom
$\circ$	0, 1 oder 3-mal	$1 + x + x^3$
$\diamond$	1 oder 2-mal	$x + x^2$
$\square$	1-mal	x

$\Rightarrow$ Erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1 + x + x^3) \cdot (x + x^2) \cdot x \\
 &= (1 + x + x^3) \cdot (x^2 + x^3) \\
 &= x^2 + x^3 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\
 &= x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5 + x^6
 \end{aligned}$$

Mit Wiederholung gibt es unter den vorgegebenen Beschränkungen

- 1 Möglichkeit, 2 Objekte aus M zu wählen, nämlich

$$\diamond \square$$

- 2 Möglichkeiten, 3 Objekte aus M zu wählen, nämlich

(a)

$$\diamond \diamond \square$$

(b)

$$\circ \diamond \square$$

- 1 Möglichkeit, 4 Objekte aus M zu wählen, nämlich

$$\circ \diamond \diamond \square$$

- 1 Möglichkeit, 5 Objekte aus M zu wählen, nämlich

$$\circ \circ \circ \diamond \square$$

5. 1 Möglichkeit, 6 Objekte aus M zu wählen, nämlich

$$\circ \circ \circ \diamond \diamond \square$$

(I) (zu 1.)

$\diamond \square$ können auf $2! = 2$ Arten permutiert werden

(II) (a) (zu 2(a))

$\diamond \diamond \square$ können auf $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ Arten angeordnet werden

(b) (zu 2(b))

$\circ \diamond \square$ können auf $3! = 6$ Arten permutiert werden

(III) (zu 3.)

$\circ \diamond \diamond \square$ können auf $\frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$ Arten angeordnet werden

(IV) (zu 4.)

$\circ \circ \circ \diamond \square$ können auf $\frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 20$ Arten angeordnet werden

(V) (zu 5.)

$\circ \circ \circ \diamond \diamond \square$ können auf $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$ Arten angeordnet werden

Ergebnis:

Die Anzahl der verschiedenen Programme der Länge $n = 0, 1, 2, \dots$ beträgt:

für $n = 0$:	0 Programme	
für $n = 1$:	0 Programme	
für $n = 2$:	2 Programme	gemäß (I)
für $n = 3$:	3 Programme	gemäß (II)(a)
und	6 Programme	gemäß (II)(b)
für $n = 4$:	12 Programme	gemäß (III)
für $n = 5$:	20 Programme	gemäß (IV)
für $n = 6$:	60 Programme	gemäß (V)

Hieraus ergibt sich als Gesamtanzahl der verschiedenen Programme 103.

Aufgabe 4

Wurf einer idealen Münze: bei Kopf wählt er Paket A , bei Zahl wählt er Paket B und greift aus dem gewählten Paket ein Bauteil heraus.

(a)

Gesucht: $P(CD)$

Lösung:

Aus dem Baumdiagramm folgt:

$$P(CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$$

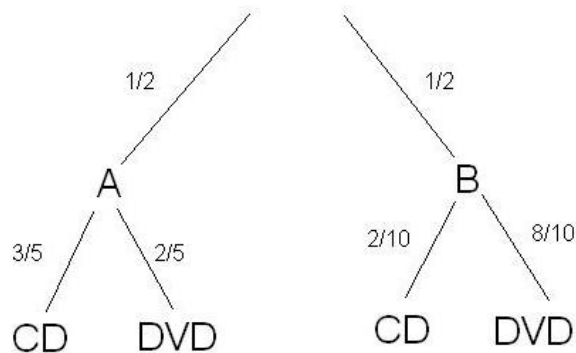


Abbildung 1: Baumdiagramm zu Aufgabe 4 (a)

(b)

Der Angestellte hat recht, wenn das CD-Laufwerk tatsächlich aus Paket A stammt. Gesucht ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Laufwerk aus Paket A stammt, wenn bekannt ist, dass es sich um ein CD-Laufwerk handelt.

Ereignis A : Das Laufwerk stammt aus Paket A

Ereignis CD : Das Laufwerk ist ein CD-Laufwerk

Berechne $P(A|CD)$:

$$\begin{aligned} P(A|CD) &= \frac{P(A \cap CD)}{P(CD)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{0.4} \\ &= \frac{0.3}{0.4} \\ &= \frac{3}{4} \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a)

Seien $A, B \subset \Omega$.

Zu zeigen: A und B unabhängig $\Leftrightarrow \Omega \setminus A$ und B unabhängig.

Beweis:

- „ $\Rightarrow$ “:

Nach Voraussetzung sind A und B unabhängig, d.h.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Setzt man $\bar{A} := \Omega \setminus A$, so ist zu zeigen:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \quad (*)$$

Beweis von (*):

Es gilt: $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

Hierbei ist:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) &= (B \cap A) \cap (\bar{A} \cap B) \\ &= B \cap \underbrace{(A \cap \bar{A})}_{=\emptyset} \cap B \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) &\stackrel{\text{n.Vor.}}{=} P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= (1 - P(A)) \cdot P(B) \\ &= P(\bar{A}) \cdot P(B) \end{aligned}$$

d.h. $\bar{A}$ und B sind unabhängig.

- „ $\Leftarrow$ “:

Nach Voraussetzung sind $\bar{A}$ und B unabhängig, d.h.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

zu zeigen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (**)$$

Beweis von (**):

Es gilt: $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

Hierbei sind $(A \cap B)$ und $(\bar{A} \cap B)$ disjunkt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) &= P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ \Rightarrow P(A \cap B) &\stackrel{\text{n.Vor.}}{=} P(B) - P(\bar{A}) \cdot P(B) \\ &= (1 - P(\bar{A})) \cdot P(B) \\ &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

d.h. A und B sind unabhängig.

□

(b)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ mit $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Sei $A := \{1, 2\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$.

Gesucht: Alle Mengen $B \subset \Omega$, die von A unabhängig sind.

Lösung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ hat die folgenden $2^4 = 16$ Teilmengen:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \emptyset \\
 B_1 &= \{1\} \\
 B_2 &= \{2\} \\
 B_3 &= \{3\} \\
 B_4 &= \{4\} \\
 B_5 &= \{1, 2\} \\
 B_6 &= \{1, 3\} \\
 B_7 &= \{1, 4\} \\
 B_8 &= \{2, 3\} \\
 B_9 &= \{2, 4\} \\
 B_{10} &= \{3, 4\} \\
 B_{11} &= \{1, 2, 3\} \\
 B_{12} &= \{1, 2, 4\} \\
 B_{13} &= \{1, 3, 4\} \\
 B_{14} &= \{2, 3, 4\} \\
 B_{15} &= \{1, 2, 3, 4\} = \Omega
 \end{aligned}$$

$$B_0 \cap A = \emptyset \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(B_0 \cap A) &= 0 \\ P(B_0) \cdot P(A) &= 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \right\} =$$

$\Rightarrow B_0 = \emptyset$ ist von $A = \{1, 2\}$ unabhängig.

Für $i = 1, 2$ gilt:

$$B_i \cap A = \{i\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(B_i \cap A) &= \frac{1}{4} \\ P(B_i) \cdot P(A) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \neq$$

Für $i = 3, 4$ gilt:

$$B_i \cap A = \emptyset \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(B_i \cap A) &= 0 \\ P(B_i) \cdot P(A) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \neq$$

$$B_5 \cap A = \{1, 2\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(B_5 \cap A) &= \frac{1}{2} \\ P(B_5) \cdot P(A) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \neq$$

$$B_6 \cap A = \{1\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(B_6 \cap A) &= \frac{1}{4} \\ P(B_6) \cdot P(A) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_6 = \{1, 3\} \text{ ist von } A \text{ unabhängig}$$

$$B_7 \cap A = \{1\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(B_7 \cap A) &= \frac{1}{4} \\ P(B_7) \cdot P(A) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_7 = \{1, 4\} \text{ ist von } A \text{ unabhängig}$$

$$B_8 \cap A = \{2\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} P(B_8 \cap A) &= \frac{1}{4} \\ P(B_8) \cdot P(A) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_8 = \{2, 3\} \text{ ist von } A \text{ unabhängig}$$

$$B_9 \cap A = \{2\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(B_9 \cap A) = \frac{1}{4} \\ P(B_9) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow B_9 = \{2, 4\} \text{ ist von } A \text{ unabhängig}$$

$$B_{10} \cap A = \emptyset \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(B_{10} \cap A) = 0 \\ P(B_{10}) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \neq$$

$$B_{11} \cap A = \{1, 2\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(B_{11} \cap A) = \frac{1}{2} \\ P(B_{11}) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \neq$$

$$B_{12} \cap A = \{1, 2\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(B_{12} \cap A) = \frac{1}{2} \\ P(B_{12}) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \neq$$

$$B_{13} \cap A = \{1\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(B_{13} \cap A) = \frac{1}{4} \\ P(B_{13}) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \neq$$

$$B_{14} \cap A = \{2\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(B_{14} \cap A) = \frac{1}{4} \\ P(B_{14}) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \neq$$

$$\Omega \cap A = A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(\Omega \cap A) = P(A) = \frac{1}{2} \\ P(\Omega) \cdot P(A) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} =$$

$\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ist von $A = \{1, 2\}$ unabhängig.

Zusammenfassung:

Folgende Mengen $B \subset \Omega$ sind von A unabhängig:

$$\emptyset; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \Omega$$

□