

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 8
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto (4x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - 4y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x \cdot e^{-x^2 - 4y^2} + (4x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - 4y^2} \cdot (-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-8x^3 - 2xy^2 + 8x) \cdot e^{-x^2 - 4y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot e^{-x^2 - 4y^2} + (4x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - 4y^2} \cdot (-8y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (-8y^3 - 32x^2y + 2y) \cdot e^{-x^2 - 4y^2}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -8x^3 - 2xy^2 + 8x \\ -8y^3 - 32x^2y + 2y \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{-x^2 - 4y^2}}_{>0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

Notwendige Bedingung für stationäre Punkte von f :

$$\nabla f(x, y) = 0$$

$$-2x \cdot (4x^2 + y^2 - 4) = 0 \quad (I)$$

$$-8y \cdot \left(y^2 + 4x^2 - \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (II)$$

1. Fall: $x = 0 \wedge y = 0$: $(I) \wedge (II)$ sind erfüllt:

$$\Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist stationärer Punkt}$$

2. Fall: $x = 0 \wedge y \neq 0$: (I) ist erfüllt:

$$\text{aus } (II) \Rightarrow \underbrace{-8y}_{\neq 0} \cdot \left(y^2 - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \vee y = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Weitere stationäre Punkte sind

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Fall: $x \neq 0 \wedge y = 0$: (II) ist erfüllt:

$$\text{aus } (I) \Rightarrow \underbrace{-2x}_{\neq 0} \cdot (4x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$\Rightarrow$ Weitere stationäre Punkte sind

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Fall: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$:

$$\text{aus (I)} \Rightarrow 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\text{aus (II)} \Rightarrow 4x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$-4 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\text{falsche Aussage})$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung; es gibt also keine weiteren stationären Punkte.

Klassifikation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (-24x^2 - 2y^2 + 8) \cdot e^{-x^2-4y^2} \\ &\quad + (-8x^3 - 2xy^2 + 8x) \cdot e^{-x^2-4y^2} \cdot (-2x) \\ &= (16x^4 + 4x^2y^2 - 40x^2 - 2y^2 + 8) \cdot e^{-x^2-4y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (-64xy) \cdot e^{-x^2-4y^2} + (-8y^3 - 32x^2y + 2y) \cdot e^{-x^2-4y^2} \cdot (-2x) \\ &= (16xy^3 + 64x^3y - 68xy) \cdot e^{-x^2-4y^2} \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= (-4xy) \cdot e^{-x^2-4y^2} + (-8x^3 - 2xy^2 + 8x) \cdot e^{-x^2-4y^2} \cdot (-8y) \\ &= (16xy^3 + 64x^3y - 68xy) \cdot e^{-x^2-4y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (-24y^2 - 32x^2 + 2) \cdot e^{-x^2-4y^2} \\ &\quad + (-8y^3 - 32x^2y + 2y) \cdot e^{-x^2-4y^2} \cdot (-8y) \\ &= (64y^4 + 256x^2y^2 - 40y^2 - 32x^2 + 2) \cdot e^{-x^2-4y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} 16x^4 + 4x^2y^2 - 40x^2 - 2y^2 + 8 & 16xy^3 + 64x^3y - 68xy \\ 16xy^3 + 64x^3y - 68xy & 64y^4 + 256x^2y^2 - 40y^2 - 32x^2 + 2 \end{pmatrix} \underbrace{e^{-x^2-4y^2}}_{>0 \, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2} \\ &=: \tilde{H}f(x, y) \cdot e^{-x^2-4y^2} \end{aligned}$$

$$\tilde{H}f(\xi) = \tilde{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit}$$

$\Rightarrow$ striktes Minimum $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f(0,0) = 0$

$\tilde{H}f(\eta_{1,2}) = \tilde{H}f\left(0, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 7.5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ist indefinit

$\Rightarrow$ Sattelpunkte $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ mit $f\left(0, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot e^{-1}$

$\tilde{H}f(\xi_{1,2}) = \tilde{H}f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -30 \end{pmatrix}$ ist negativ definit

$\Rightarrow$ strikt Maxima $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f(\pm 1, 0) = 4 \cdot e^{-1}$

□

Aufgabe 2

Gegeben: $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$, wobei gilt: $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$ und

$\sum_{i=1}^n x_i = c$ mit einer Konstanten $c > 0$.

Gesucht: Das Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung

$$c - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

Lösung:

$f(x_1, \dots, x_n)$ maximal $\Leftrightarrow (f(x_1, \dots, x_n))^n$ maximal, sei

$$p(x_1, \dots, x_n) := (f(x_1, \dots, x_n))^n = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

Also:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

Betrachte weiterhin die Funktion $g(x_1, \dots, x_n) = c - \sum_{i=1}^n x_i$ und die erweiterte Zielfunktion

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n, \lambda) &:= p(x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot g(x_1, \dots, x_n) \\ \Rightarrow F(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= \prod_{i=1}^n x_i + \lambda \cdot \left(c - \sum_{i=1}^n x_i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= \prod_{i=1, i \neq j}^n x_i - \lambda \quad \text{für } j \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= c - \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= 0 \quad \text{für jedes } j \in \{1, \dots, n\} \\ \wedge \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 &\Rightarrow \lambda = \prod_{i=1, i \neq j}^n x_i \quad (*), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Seien $l, k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig.

$$\begin{aligned}\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \lambda &= \prod_{i=1, i \neq l}^n x_i \quad \wedge \quad \lambda = \prod_{i=1, i \neq k}^n x_i \\ \Rightarrow \prod_{i=1, i \neq l}^n x_i &= \prod_{i=1, i \neq k}^n x_i \\ \Rightarrow x_k &= x_l, \quad \forall k, l \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Also gilt:

$$x_1 = \dots = x_n =: x \quad (**)$$

Für das Maximum der Funktion p und somit auch der Funktion f kommen nur die stationären Punkte $\xi = (x, \dots, x)^T \in \mathbb{R}_{>0}^n$ in Frage.

$$\begin{aligned}\text{aus } \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 &\Rightarrow c - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ &\stackrel{(**)}{\Rightarrow} c - \sum_{i=1}^n x = 0 \\ &\Leftrightarrow c - n \cdot x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

Für den stationären Punkt $\xi = \left(\frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n}\right)^T \in \mathbb{R}_{>0}^n$ von p und f ergibt sich:

$$\begin{aligned}p(\xi) &= p\left(\frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n}\right) = \prod_{i=1}^n \frac{c}{n} = \left(\frac{c}{n}\right)^n \\ \Rightarrow f(\xi) &= \sqrt[n]{p(\xi)} = \sqrt[n]{\left(\frac{c}{n}\right)^n} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

Ergebnis:

Die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$ hat ihr Maximum im Punkt $\xi = (\frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n})^T \in \mathbb{R}_{>0}^n$ mit $f(\xi) = \frac{c}{n}$.

Nachtrag:

Es gibt keinen stationären Punkt $\tilde{\xi} = (\tilde{x}, \dots, \tilde{x})^T \in \mathbb{R}_{>0}^n$ mit $f(\tilde{\xi}) > \frac{c}{n}$, denn: wegen $f(\tilde{\xi}) = \sqrt[n]{\tilde{x}^n} = \tilde{x}$ würde folgen $\tilde{x} > \frac{c}{n}$ und hieraus:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{x} = n \cdot \tilde{x} > n \cdot \frac{c}{n} = c$$

Somit ist $\sum_{i=1}^n x_i = c$ nicht erfüllt.

Aufgabe 3

Zu bestimmen: Kandidaten für Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ auf der Schnittmenge der Ebene $x - y + z = 1$ und dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung: Lagrange-Funktion

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 2y + 3z + \lambda \cdot (x - y + z - 1) + \mu \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \lambda + 2\mu x \\ F_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2 - \lambda + 2\mu y \\ F_z &= \frac{\partial F}{\partial z} = 3 + \lambda \\ F_\lambda &= \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x - y + z - 1 \\ F_\mu &= \frac{\partial F}{\partial \mu} = x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $\nabla F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$1 + \lambda + 2\mu x = 0 \quad (1)$$

$$2 - \lambda + 2\mu y = 0 \quad (2)$$

$$3 + \lambda = 0 \quad (3)$$

$$x - y + z - 1 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

Aus (3) $\Rightarrow \lambda = -3$

$$(3) \text{ in } (1) \Rightarrow -2 + 2\mu x = 0 \Leftrightarrow \mu x = 1 \quad (1')$$

$$(3) \text{ in } (2) \Rightarrow 5 + 2\mu y = 0 \Leftrightarrow \mu y = -\frac{5}{2} \quad (2')$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } x = 0 \Rightarrow (1') \text{ hat keine Lösung} \\ \text{Falls } y = 0 \Rightarrow (2') \text{ hat keine Lösung} \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu xy = y \quad \wedge \quad \mu xy &= -\frac{5}{2}x \\ \stackrel{(1')(2')}{\Rightarrow} y &= -\frac{5}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in (5)} \Rightarrow x^2 + \left(-\frac{5}{2}x\right)^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{29}{4}x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4}{29} \\ \Leftrightarrow |x| &= \frac{2}{\sqrt{29}} \\ x_1 &= \frac{2}{\sqrt{29}} \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ y_1 &= -\frac{5}{\sqrt{29}} \\ y_2 &= \frac{5}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{aus (1')} : \mu_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} &= 1 \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{aus (1')} : \mu_2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right) &= 1 \\ \mu_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{aus (4) : } z_1 &= 1 - x_1 + y_1 \\ z_1 &= 1 - \frac{2}{\sqrt{29}} - \frac{5}{\sqrt{29}} \\ z_1 &= 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{aus (4) : } z_2 &= 1 - x_2 + y_2 \\ z_2 &= 1 + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{5}{\sqrt{29}} \\ z_2 &= 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{5}{\sqrt{29}} \\ 1 - \frac{7}{\sqrt{29}} \\ -3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{29} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} \\ 1 + \frac{7}{\sqrt{29}} \\ -3 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

lösen das Gleichungssystem.

Kandidaten für Extrema der Funktion f sind demnach die Punkte

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ \sqrt{29} - 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ \sqrt{29} + 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Variationsproblem:

$$I(y(x)) := \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

$y(x)$ sei eine C^2 -Funktion auf $[a, b]$.

Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y_x} = 0$$

Sei $F(x, y, y_x) = \sqrt{1 + y_x^2}$ ($y_x := y'$)

$$\begin{aligned}
 F_y &= 0 \\
 F_{y_x} &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + y_x^2}} \cdot 2y_x = \frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} \\
 \Rightarrow \frac{d}{dx} F_{y_x} &= \frac{y_{xx} \cdot \sqrt{1 + y_x^2} - y_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 + y_x^2}} \cdot 2y_x \cdot y_{xx}}{1 + y_x^2} \\
 \frac{d}{dx} F_{y_x} &= \frac{y_{xx} \cdot (1 + y_x^2) - y_x^2 \cdot y_{xx}}{(1 + y_x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 \frac{d}{dx} F_{y_x} &= \frac{y_{xx}}{(1 + y_x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 \Rightarrow 0 &= F_y - \frac{d}{dx} F_{y_x} = 0 - \frac{y_{xx}}{(1 + y_x^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Euler-Lagrange-Gleichung zu obigem Variationsproblem lautet:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Für die Gerade $y(x) = cx + d$ gilt:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= c \\
 y''(x) &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{0}{(1 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 0 \quad \forall x \in [a, b]
 \end{aligned}$$

Die Geraden $y(x) = cx + d$ erfüllen also diese Differenzialgleichung. $\square$

Aufgabe 5

$$E_{a,b,c}(0) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

Berechne das Volumen $V(\tilde{E}_{a,b,c}(0))$ des Ellipsoidoktanten mit $(x, y, z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$.

$$\begin{aligned}
 V(\tilde{E}_{a,b,c}(0)) &= \int_{\tilde{E}} 1 dx dy dz \\
 &= \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_0^{\frac{c}{b}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{c}{b} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-y^2} dy \right) dx \quad (*) \text{ siehe Nachtrag} \\
 &= \int_0^a \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx \quad (*) \text{ siehe Nachtrag} \\
 &= \frac{c}{b} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \int_0^a (a^2-x^2) dx \\
 &= \frac{\pi \cdot b \cdot c}{4a^2} \cdot \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\
 &= \frac{\pi \cdot b \cdot c}{4a^2} \cdot \frac{2}{3}a^3 \\
 &= \frac{1}{6}\pi abc
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Gesamtvolumen

$$\begin{aligned}
 V(E_{a,b,c}(0)) &= 8 \cdot V(\tilde{E}_{a,b,c}(0)) \\
 \Rightarrow V(E_{a,b,c}(0)) &= \frac{4}{3}\pi abc
 \end{aligned}$$

Nachtrag:

Berechne

$$\int_0^R \sqrt{R^2-y^2} dy, \quad R > 0$$

Substitution:

$$\begin{aligned}
 y &= R \cdot \sin(t) \\
 dy &= R \cdot \cos(t) dt \\
 y = 0 &\Rightarrow t = 0 \\
 y = R &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot R \cdot \cos(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \underbrace{|\cos(t)|}_{\geq 0} \cdot R \cdot \cos(t) dt \\
&= R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \\
&= R^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (t + \sin(t) \cdot \cos(t)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2
\end{aligned}$$

Aus

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2$$

ergibt sich für $R = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\int_0^{\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - y^2} dy = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2$$

Weitere Lösungsmöglichkeit:

Sei

$$B_1(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

sei

$$E_{a,b,c}(0) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c > 0$$

Betrachte die lineare Abbildung

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y, z)^T \mapsto (ax, by, cz)^T$$

also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$F(B_1(0)) = E_{a,b,c}(0)$$

und

$$V(E_{a,b,c}(0)) = \det A \cdot V(B_1(0))$$

Mit $\det A = abc$ und $V(B_1(0)) = \frac{4}{3}\pi$ (Volumen der Einheitskugel) folgt:

$$V(E_{a,b,c}(0)) = \frac{4}{3}\pi abc$$