

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 7
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

(a)

$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, $x, y \in (0, +\infty)$, $\xi = (1, 1)^T$ sei Entwicklungspunkt.

Taylorentwicklung der Funktion f bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Für das Taylorpolynom $T_2(\varrho, \xi)$, $\varrho = (x, y)^T$ gilt:

$$T_2(\varrho, \xi) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} [(\varrho - \xi)^T \nabla]^k f|_{\xi}$$

$$\text{wobei } [(\varrho - \xi)^T \nabla]^k = [(x-1)\partial_x + (y-1)\partial_y]^k$$

$$\Rightarrow T_2(\varrho, \xi) = f(\xi) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)$$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot \left[\left((x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi) \right)^2 \right]$$

$$T_2(\varrho, \xi) = f(\xi) + (x-1)f_x(\xi) + (y-1)f_y(\xi)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot [(x-1)^2 f_{xx}(\xi) + 2(x-1)(y-1)f_{xy}(\xi) + (y-1)^2 f_{yy}(\xi)]$$

$$f_x(x, y) = \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = 2 \cdot \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = -2 \cdot \frac{x}{(x+y)^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \cdot \frac{-y \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = -4 \cdot \frac{y}{(x+y)^3}$$

$$f_{xy}(x, y) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x+y)^2 - y \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = 2 \cdot \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

$$f_{yy}(x, y) = -2 \cdot \frac{-x \cdot 2 \cdot (x+y)}{(x+y)^4} = 4 \cdot \frac{x}{(x+y)^3}$$

Hieraus folgt:

$$f(\xi) = f(1, 1) = 0$$

$$f_x(\xi) = f_x(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$f_y(\xi) = f_y(1, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_{xx}(\xi) = f_{xx}(1, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_{xy}(\xi) = f_{xy}(1, 1) = 0$$

$$f_{yy}(\xi) = f_{yy}(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_2(\varrho, \xi) &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \\
&= -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}y^2 - y \\
\Rightarrow f(x, y) &= -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}y^2 - y + R_2(\varrho, \xi)
\end{aligned}$$

Für das Lagrange-Restglied $R_2(\varrho, \xi)$ gilt:

$$\begin{aligned}
R_2(\varrho, \xi) &= \frac{1}{3!}[(\varrho - \xi)^T \nabla]^3 f|_{\xi + \Theta(\varrho - \xi)}, \quad \Theta \in (0, 1) \\
\Rightarrow R_2(\varrho, \xi) &= \frac{1}{3!}[(x-1)\partial_x + (y-1)\partial_y]^3 f|_{\xi + \Theta(\varrho - \xi)} \\
\Rightarrow R_2(\varrho, \xi) &= \frac{1}{6} \cdot [(x-1)^3(\partial_x)^3 + 3(x-1)^2(y-1)(\partial_x)^2\partial_y \\
&\quad + 3(x-1)(y-1)^2\partial_x(\partial_y)^2 + (y-1)^3(\partial_y)^3]f|_{\xi + \Theta(\varrho - \xi)}
\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R_2(\varrho, \xi) &= \frac{1}{6}(x-1)^3 f_{xxx}(\xi + \Theta(\varrho - \xi)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) f_{xxy}(\xi + \Theta(\varrho - \xi)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x-1)(y-1)^2 f_{xyy}(\xi + \Theta(\varrho - \xi)) \\
&\quad + \frac{1}{6}(y-1)^3 f_{yyy}(\xi + \Theta(\varrho - \xi)) \\
\text{mit } (\varrho + \Theta(\varrho - \xi))^T &= (1 + \Theta(x-1), 1 + \Theta(y-1))^T \\
&= ((1 - \Theta) + \Theta x, (1 - \Theta) + \Theta y)^T, \quad \Theta \in (0, 1)
\end{aligned}$$

(2) Die partiellen Ableitungen berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 f_{xxx}(x, y) &= -4 \cdot \frac{-y \cdot 3(x+y)^2}{(x+y)^6} = 12 \cdot \frac{y}{(x+y)^4} \\
 f_{xxy}(x, y) &= -4 \cdot \frac{1 \cdot (x+y)^3 - y \cdot 3 \cdot (x+y)^2}{(x+y)^6} \\
 &= -4 \cdot \frac{x-2y}{(x+y)^4} \\
 &= 4 \cdot \frac{2y-x}{(x+y)^4} \\
 f_{xyy}(x, y) &= 2 \cdot \frac{-1(x+y)^3 - (x-y) \cdot 3 \cdot (x+y)^2}{(x+y)^6} \\
 &= 4 \cdot \frac{y-2x}{(x+y)^4} \\
 f_{yyy}(x, y) &= 4 \cdot \frac{-x \cdot 3 \cdot (x+y)^2}{(x+y)^6} \\
 &= -12 \cdot \frac{x}{(x+y)^4}
 \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) lässt sich $R_2(\varrho, \xi)$ berechnen. □

(b)

Nährungswert für $f(1.2; 0.9)$:

$$f(1.2; 0.9) \approx -\frac{1}{4} \cdot 1.2^2 + 1.2 + \frac{1}{4} \cdot 0.9^2 - 0.9 = 0.1425$$

Exakter Wert:

$$f(1.2; 0.9) = \frac{1.2 - 0.9}{1.2 + 0.9} = \frac{0.3}{2.1} = \frac{1}{7} \approx 0.1429$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Diffusionsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und das dazu gebildete Finite-Differenzen-Verfahren aus der Vorlesung. Seien

$$u_i^0 := \begin{cases} 1 & \text{für } |i| = 1, 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Werte der 0-ten Zeitschicht.

Zu berechnen sind die numerisch genährten Funktionswerte u_i^k für die drei Zeitschichten $k = 1, 2, 3$ und die Gitterpunkte $i = -5, -4, \dots, 4, 5$.

Gemäß der Vorlesung gilt für eine Approximation der u_i^k an $u(x, t)$ im Punkt $(ih, k\tau)$ die Approximationsbedingung:

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} &= \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} \\ \Leftrightarrow u_i^{k+1} &= \frac{\tau}{h^2} u_{i+1}^k + \left(1 - 2 \cdot \frac{\tau}{h^2}\right) u_i^k + \frac{\tau}{h^2} u_{i-1}^k\end{aligned}$$

Für $h = 1$ und $\tau = 0.1$ ergibt sich:

$$u_i^{k+1} = 0.1 \cdot u_{i+1}^k + 0.8u_i^k + 0.1u_{i-1}^k$$

Aus den Funktionswerten u_i^0 zur Zeitschicht $k = 0$ berechnet man die neuen Werte u_i^1 gemäß $u_i^1 = 0.1u_{i+1}^0 + 0.8u_i^0 + 0.1u_{i-1}^0$ und hieraus iterativ die Werte u_i^2 und danach u_i^3 gemäß $u_i^2 = 0.1u_{i+1}^1 + 0.8u_i^1 + 0.1u_{i-1}^1$ und $u_i^3 = 0.1u_{i+1}^2 + 0.8u_i^2 + 0.1u_{i-1}^2$.

Die daraus errechneten numerisch genährten Funktionswerte u_i^k für die drei Zeitschichten $k = 1, 2, 3$ und die Gitterpunkte $i = -5, -4, \dots, 4, 5$ sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
u_i^1	0	0	0.1	0.9	0.9	0.2	0.9	0.9	0.1	0	0
u_i^2	0	0.01	0.17	0.82	0.83	0.34	0.83	0.82	0.17	0.01	0
u_i^3	0.001	0.025	0.219	0.756	0.780	0.438	0.780	0.756	0.219	0.025	0.001

Zeichnung siehe Anhang.

Aufgabe 3

Von einer Funktion $u(x)$ seien die Werte $u_{i+\frac{1}{2}} = u(i + \frac{1}{2})$ an den Stellen $x = i + \frac{1}{2}, i \in \mathbb{Z}$, bekannt. $u(x)$ sei unendlich oft differenzierbar.

(a)

Zu bestimmen ist eine möglichst gute Approximation für den Wert $u_i'' = u''(i)$ unter Verwendung der 4 Funktionswerte $u_{i-\frac{3}{2}}, u_{i-\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{3}{2}}$.

Lösung:

Die Gitterweite h des äquidistanten Gitters $\Gamma := \{x_i | x_i = i + \frac{1}{2}, i \in \mathbb{Z}\}$ ist $h = 1$.

Soll der Approximationsfehler dabei höchstens $\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(1)$ betragen, muss gelten:

$$u_i'' = \alpha u_{i-\frac{3}{2}} + \beta u_{i-\frac{1}{2}} + \gamma u_{i+\frac{1}{2}} + \delta u_{i+\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(1)$$

Berechne zunächst für $u_{i+l} = u(i+l)$ das Taylorpolynom 3-ten Grades für die Entwicklung um den Punkt $\xi = i$:

$$\begin{aligned} u_{i+l} &= u(i+l) \approx T_3(l, i) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} l^k u_i^{(k)} \\ &= u_i + l u_i' + \frac{1}{2} l^2 u_i'' + \frac{1}{6} l^3 u_i''' \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{für } l = -\frac{3}{2}: \quad u_{i-\frac{3}{2}} &\approx u_i - \frac{3}{2} u_i' + \frac{9}{8} u_i'' - \frac{9}{16} u_i''' \\ \text{für } l = -\frac{1}{2}: \quad u_{i-\frac{1}{2}} &\approx u_i - \frac{1}{2} u_i' + \frac{1}{8} u_i'' - \frac{1}{48} u_i''' \\ \text{für } l = \frac{1}{2}: \quad u_{i+\frac{1}{2}} &\approx u_i + \frac{1}{2} u_i' + \frac{1}{8} u_i'' + \frac{1}{48} u_i''' \\ \text{für } l = \frac{3}{2}: \quad u_{i+\frac{3}{2}} &\approx u_i + \frac{3}{2} u_i' + \frac{9}{8} u_i'' + \frac{9}{16} u_i''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha u_{i-\frac{3}{2}} + \beta u_{i-\frac{1}{2}} + \gamma u_{i+\frac{1}{2}} + \delta u_{i+\frac{3}{2}} &\approx \alpha \cdot \left(u_i - \frac{3}{2} u_i' + \frac{9}{8} u_i'' - \frac{9}{16} u_i''' \right) \\ &\quad + \beta \cdot \left(u_i - \frac{1}{2} u_i' + \frac{1}{8} u_i'' - \frac{1}{48} u_i''' \right) \\ &\quad + \gamma \cdot \left(u_i + \frac{1}{2} u_i' + \frac{1}{8} u_i'' + \frac{1}{48} u_i''' \right) \\ &\quad + \delta \cdot \left(u_i + \frac{3}{2} u_i' + \frac{9}{8} u_i'' + \frac{9}{16} u_i''' \right) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta) u_i + \left(-\frac{3}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma + \frac{3}{2} \delta \right) u_i' \\ &\quad + \left(\frac{9}{8} \alpha + \frac{1}{8} \beta + \frac{1}{8} \gamma + \frac{9}{8} \delta \right) u_i'' \\ &\quad + \left(-\frac{9}{16} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{1}{48} \gamma + \frac{9}{16} \delta \right) u_i''' \end{aligned}$$

Da dies mit $u_i'' = 0 \cdot u_i + 0 \cdot u_i' + 1 \cdot u_i'' + 0 \cdot u_i'''$ übereinstimmen soll, ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 0 \\ -\frac{3}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma + \frac{3}{2} \delta &= 0 \\ \frac{9}{8} \alpha + \frac{1}{8} \beta + \frac{1}{8} \gamma + \frac{9}{8} \delta &= 1 \\ -\frac{9}{16} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{1}{48} \gamma + \frac{9}{16} \delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} \overbrace{1}^{\beta} & \overbrace{1}^{\gamma} & \overbrace{1}^{\alpha} & \overbrace{1}^{\delta} & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & -27 & 27 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & -26 & 28 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & -24 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -48 & -24 \end{array} \right) \\
& \Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$u_i'' \approx \frac{1}{2}(u_{i-\frac{3}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{3}{2}})$$

□

Aufgabe 4

(a)

$d_i := y_i - (ax_i + b)$ sei die vertikale Abweichung des Punktes (x_i, y_i) von der durch $ax + b$ bestimmten Geraden.

Zu bestimmen sind a und b , sodass $\sum_{i=1}^n d_i^2$ minimal wird.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n d_i^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2
\end{aligned}$$

$$\text{Sei } S(a, b) := \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2b \sum_{i=1}^n 1 - 2 \sum_{i=1}^n y_i \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2 \left(a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i - y_i x_i) \\ \frac{\partial S}{\partial a} &= 2 \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \quad (2) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $\text{grad } S = 0$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4)$$

Hinreichende Bedingung:

Untersuchung, ob $S(a, b)$ für a, b aus (3) und (4) minimal wird. Berechne dazu die Hesse-Matrix HS :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} &= 2 \cdot n \\ \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial a} \\ \Rightarrow HS &= \begin{pmatrix} 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 & 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i & 2 \cdot n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Nach Aufgabenstellung ist es sinnvoll anzunehmen, dass

- (i) $n \geq 2$ ist und
- (ii) es unter den Größen $x_1, \dots, x_n$ mindestens 2 voneinander verschiedene gibt.

Unter Zugrundelegung dieser Annahmen wird nun gezeigt, dass HS positiv definit ist.

Es gilt:

$$\det \left(2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{\geq 0} > 0 \quad (5)$$

>0 wegen (i) und (ii)

Es gilt:

$$\det HS = 4 \cdot \left[\underbrace{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}_{>0 (*)} \right] > 0 \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt, dass HS positiv definit ist; damit ist gezeigt, dass $S(a, b)$ minimal wird.

Nachtrag: Beweis von (*)

Behauptung:

Unter den Annahmen (i) und (ii) gilt:

$$n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: $n = 2$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{i=1}^2 x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^2 x_i \right)^2 &= 2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 > 0 \quad \text{da wegen (ii): } x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

2. (a) Induktionsannahme:

Für $n \geq 2$ gelte:

$$n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0$$

- (b) Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch:

$$(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^2 > 0$$

- (c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
& (n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^2 \\
= & (n+1) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \right)^2 \\
= & n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + 1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \cdot x_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 \\
& - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - x_{n+1}^2 \\
= & \underbrace{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}_{>0 \text{ nach 2(a)}} + \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2x_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^n 1 \\
> & \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i x_{n+1} + x_{n+1}^2) \\
= & \underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{n+1})^2}_{\geq 0}}_{>0 \text{ nach Vor.}} > 0
\end{aligned}$$

□

(b)

Datenpaare (GByte, Sekunden):

$$(x_i, y_i) : (3.1, 2.2); (4.3, 4.9); (6.1, 11.2); (6.8, 13.5); (9.5, 21)$$

Berechnung der „Least Square“-Gerade $y = ax + b$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 x_i &= 29.8 \\ \sum_{i=1}^5 y_i &= 52.8 \\ \sum_{i=1}^5 x_i^2 &= 201.8 \\ \sum_{i=1}^5 x_i y_i &= 387.51\end{aligned}$$

Damit ist wegen (3) und (4) aus Teil (a) folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned}(I) \quad 29.8a + 5b &= 52.8 \\ (II) \quad 201.8a + 29.8b &= 387.51\end{aligned}$$

Aus (I) folgt:

$$\begin{aligned}b &= \frac{52.8 - 29.8a}{5} \\ b &= 10.56 - 5.96a\end{aligned}$$

In (II) eingesetzt:

$$\begin{aligned}201.8a + 29.8 \cdot (10.56 - 5.96a) &= 387.51 \\ \Leftrightarrow 201.8a + 314.688 - 177.608a &= 387.51 \\ 24.192a &= 72.822 \\ a &\approx 3.01 \\ \Rightarrow b &\approx -7.38\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Gleichung der „Least Square“-Geraden lautet:

$$y = 3.01x - 7.38$$

Zeichnung siehe Anhang.