

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 6
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

(a)

Seien $a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Behauptung: $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\varphi)$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$, und $\varphi := |\angle(a, b)|$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 |a \times b|^2 &= (a \times b)(a \times b) \\
 &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
 &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 \\
 &\quad - 2(a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3) \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
 &= |a|^2 \cdot |b|^2 - (a \cdot b)^2 \\
 &= |a|^2 \cdot |b|^2 - (|a| \cdot |b| \cdot \cos(\varphi))^2 \\
 &= |a|^2 \cdot |b|^2 - (1 - \cos^2(\varphi)) \\
 &= |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \sin^2(\varphi)
 \end{aligned}$$

Insgesamt: $|a \times b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \sin^2(\varphi)$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |a \times b| &= |a| \cdot |b| \cdot |\sin(\varphi)| \\
 &= |a| \cdot |b| \cdot \sin(\varphi) \quad \text{wegen } 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ gilt: } \sin(\varphi) \geq 0
 \end{aligned}$$

Berechnung der Flächenmaßzahl A des von den lin. unabh. Vektoren a und b aufgespannten Parallelogramms:

Berechnung der Parallelogrammhöhe h für:

- $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 A &= |a| \cdot |h| \\
 |h| &= |b| \sin(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\varphi) = |a \times b|$$

- $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$

$$\begin{aligned}
 A &= |a| \cdot |h| \\
 |h| &= |b| \cdot \sin(\varphi') \\
 |h| &= |b| \cdot \sin(180^\circ - \varphi) \\
 |h| &= |b| \cdot \sin(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\varphi) = |a \times b|$$

(b)

Die lin. unabh. Vektoren, die das Parallelepiped im Raum aufspannen, seien zunächst so benannt, dass sie in der Reihenfolge b, c, a ein Rechtssystem bilden.

Die Grundfläche G des Parallelepipeds werde von b, c aufgespannt. Nach Teil (a) hat die Grundfläche G den Inhalt $|b \times c|$. Sei $\psi = |\angle(b \times c, a)|$ mit $-\frac{\pi}{2} < \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Dann gilt für die Höhe h des Parallelepipeds $|h| = |a| \cdot \cos(\psi)$ und für sein Volumen V ergibt sich:

$$V = |G| \cdot |h| = |b \times c| \cdot |a| \cdot \cos(\psi) = (b \times c) \cdot a$$

Vertauscht man in dem Ausdruck $(b \times c) \cdot a$ die Vektoren b und c miteinander, so erhält man $(c \times b) \cdot a$. Nun bilden c, b, a in dieser Reihenfolge ein Linkssystem.

Wegen $c \times b = -(b \times c)$ ergibt sich:

$$(c \times b) \cdot a = -(b \times c) \cdot a = -V$$

Deshalb ist in der Volumenformel der Absolutwert zu nehmen, also:

$$V = |(b \times c) \cdot a| = |a \cdot (b \times c)| \quad (\text{da das Skalarprodukt kommutativ ist})$$

(c)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ mit $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$.

Behauptung:

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(d)

Vor.: $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig

Beh.: $a \cdot (a \times b) = 0 \wedge b \cdot (a \times b) = 0$

Bew.:

$$a \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{da die 1. und 2. Zeile der Determinante \u00fcbereinstimmen}$$

$$b \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{da die 1. und 3. Zeile der Determinante \u00fcbereinstimmen}$$

(e)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= c \cdot (a \times b) = (a \times b) \cdot c \quad \text{da } \cdot \text{ kommutativ} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto (\underbrace{e^t}_{f_1}, \underbrace{\sin(t^2)}_{f_2}, \underbrace{\cos(t^3)}_{f_3})^T$$

Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) von f :

$$Jf(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial f_3}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2t \cdot \cos(t^2) \\ -3t^2 \cdot \sin(t^3) \end{pmatrix}$$

(b)

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; x = (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} 2^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot e^{-\ln(2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \\ x_2 \cdot e^{-\ln(2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix von g :

$$Jg(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) &= e^{-\ln(2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} + x_1 \cdot e^{-\ln(2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} \cdot (-\ln(2)) \cdot 2x_1 \\ &= (1 - 2(\ln(2)) \cdot x_1^2) \cdot 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) = (1 - 2(\ln(2)) \cdot x_2^2) \cdot 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) &= x_2 \cdot e^{-\ln(2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} \cdot (-\ln(2)) \cdot 2x_1 \\ &= -2(\ln(2))x_1x_2 \cdot 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) = -2(\ln(2))x_1x_2 \cdot 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x) = -2(\ln(2))x_1x_3 \cdot 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x) = -2(\ln(2))x_2x_3 \cdot 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} 1 - 2(\ln(2))x_1^2 & -2(\ln(2))x_1x_2 & -2(\ln(2))x_1x_3 \\ -2(\ln(2))x_1x_2 & 1 - 2(\ln(2))x_2^2 & -2(\ln(2))x_2x_3 \\ -2(\ln(2))x_1x_3 & -2(\ln(2))x_2x_3 & 1 - 2(\ln(2))x_3^2 \end{pmatrix} \cdot 2^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

(c)

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; x = (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto x_3 \cdot e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

Jacobi-Matrix von g :

$$Jg(x) := \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \frac{\partial g}{\partial x_3}(x) \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = x_3 \cdot e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}(-2x_1)$$

$$= -2x_1x_3 \cdot e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = -2x_2x_3 \cdot e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}(x) = e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2} + x_3 \cdot e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2} \cdot (-2x_3)$$

$$= (1 - 2x_3^2) \cdot e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

$$\Rightarrow Jg(x) = (-2x_1x_3, -2x_2x_3, 1 - 2x_3^2)e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

Aufgabe 3

(a)

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, d.h. f sei eine C^2 -Funktion auf D .

Zeige: $\operatorname{rot} \nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in D$.

Beweis:

Sei $x := (x_1, x_2, x_3)^T \in D$ beliebig.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \nabla f(x) &= \nabla x \nabla f(x) \\
 &= \begin{vmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{vmatrix} \quad e_1, e_2, e_3 \text{ sind die kanonischen Einheitsvektoren im } \mathbb{R}^3 \\
 &= e_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{vmatrix} - e_2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{vmatrix} + e_3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \right) e_1 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \right) \right) e_2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right) \right) e_3 \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Begründung: Da f nach Voraussetzung eine C^2 -Funktion ist, gilt nach dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

□

(b)

Gegeben: Potentialfeld $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x) = -E \frac{x}{|x|^3}, \quad x \in D := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

Sei $x := (x_1, x_2, x_3)^T \in D$ beliebig.

$$\Rightarrow F(x) := \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Ex_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -Ex_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -Ex_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Betrachte nun die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{E}{|x|}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= f(x_1, x_2, x_3) = \frac{E}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = E \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \nabla f(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} \quad (**) \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= E \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_i \\ &= -Ex_i(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Aus (*) und (**) folgt:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= F(x) \\ \Rightarrow \operatorname{rot} F(x) &= \operatorname{rot} \nabla f(x) = 0 \quad \text{nach Teil (a)} \end{aligned}$$

Also:

$$\operatorname{rot} F(x) = 0 \quad \forall x \in D$$

□

Aufgabe 4

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, sei $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^2 -Vektorfeld.

(a)

Beh.: $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$

Beweis: Sei $x := (x_1, x_2, x_3)^T \in D$ beliebig.

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } F(x) &:= \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \operatorname{rot} F(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} F(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x) \right) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right) \\
 &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x) \\
 &\quad + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1}(x) \\
 &\quad + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}(x) \\
 &= \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}(x) \right)}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1}(x) - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x) \right)}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x) - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1}(x) \right)}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Begründung: F ist ein C^2 -Vektorfeld $\Rightarrow$ jede Komponentenfunktion $F_i(x)$ ist eine C^2 -Funktion $\Rightarrow$ aus dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz, dass für

die Funktionen F_i die Reihenfolge der 2. partiellen Ableitungen vertauschbar ist. $\square$

(b)

Gegeben: Vektorfeld $F : D \subset \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, mit

$$F(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2y \\ z \\ xyz \end{pmatrix}$$

Gibt es ein anderes Vektorfeld $G : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ so dass gilt: $F = \operatorname{rot} G$?

Annahme: Es gibt ein Vektorfeld $G | F = \operatorname{rot} G \quad (*)$.

Sei $\xi := (x, y, z)^T \in D$.

$$\begin{aligned} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \operatorname{div} \operatorname{rot} G(\xi) &= \operatorname{div} F(\xi) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(\xi) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\xi) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\xi) \\ &= 2xy + 0 + xy = 3xy \end{aligned}$$

Nach Teil (a) ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} G &= 0 \\ \Rightarrow 3xy &= 0 \\ \Leftrightarrow x \cdot y &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad y = 0 \\ \Rightarrow F(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ein Vektorfeld $G = (G_1, G_2, G_3)^T$ mit $F = \operatorname{rot} G$ kann es also nur geben, wenn $x = 0 \vee y = 0$ ist, d.h. nur für Vektorfelder F der Form $F(x, y, z) = (0, z, 0)^T$

Es muss also gelten:

$$\operatorname{rot} G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = F \quad (**)$$

Folgende Vektorfelder $G = (G_1, G_2, G_3)^T$ lösen (**):

1. Fall: $x = y = 0$. Sei

$$G := \left(\frac{1}{2}z^2, 0, 0 \right)^T$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= 0 - 0 = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= z - 0 = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= 0 - 0 = 0 \\ \Rightarrow \operatorname{rot} G &= F\end{aligned}$$

2. Fall: $x \neq 0 \wedge y = 0$. Sei

$$G := (z^2, 0, xz)^T$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= 0 - 0 = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= 2z - z = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= 0 - 0 = 0 \\ \Rightarrow \operatorname{rot} G &= F\end{aligned}$$

3. Fall: $x = 0 \wedge y \neq 0$. Sei

$$G := \left(\frac{1}{2}z^2, z^2, 2yz\right)^T$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= 2z - 2z = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= z - 0 = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= 0 - 0 = 0 \\ \Rightarrow \operatorname{rot} G &= F\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

1. Fall $x \cdot y \neq 0$ ist, gibt es kein Vektorfeld G , sodass $F = \operatorname{rot} G$ ist.
2. Falls $x \cdot y = 0$ ist, gibt es Vektorfelder G , sodass $F = \operatorname{rot} G$ ist, wobei $F(x, y, z) = (0, z, 0)^T$ sein muss, und zwar:

$$G(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}z^2, 0, 0\right)^T & , \quad x = y = 0 \\ (z^2, 0, xz)^T & , \quad x \neq 0 \wedge y = 0 \\ \left(\frac{1}{2}z^2, z^2, 2yz\right)^T & , \quad x = 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$