

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 5
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

(b)

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

ges.: $\kappa(M) = \|M\|_2 \cdot \|M^{-1}\|_2$ bezügl. der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$.

Berechne $\|M\|_2$:

Da M symmetrisch $\Rightarrow \|M\|_2 = \max_k \{|\lambda_k| \mid \lambda_k \text{ EW von } M\}$

Eigenwerte von M :

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda \cdot I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \left(\frac{1}{6} - \lambda \right) - \frac{1}{9} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} - \lambda - \frac{1}{6}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{9} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{18} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{144} - \frac{8}{144}} = \frac{7}{12} \pm \frac{1}{12}\sqrt{41}$$

$$\lambda_1 = \frac{7}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{41}$$

$$\lambda_2 = \frac{7}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{41}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|M\|_2 &= |\lambda_1| \\ &= \frac{7}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{41} \\ \|M\|_2 &= \frac{1}{12} \cdot (7 + \sqrt{41}) \end{aligned}$$

Bestimme M^{-1} :

$$\begin{array}{cc|cc}
 1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\
 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{3} & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 3 & -6 \\
 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{3} & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 3 & -6 \\
 0 & 1 & -6 & 18
 \end{array}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

M^{-1} ist symmetrisch $\Rightarrow \|M^{-1}\|_2 = \max_k \{|\mu_k| \mid \mu_k \text{ EW von } M^{-1}\}$

Berechnung der Eigenwerte von M^{-1} :

$$\begin{aligned}
 \det(M^{-1} - \mu \cdot I) &= 0 \\
 \begin{vmatrix} 3 - \mu & -6 \\ -6 & 18 - \mu \end{vmatrix} &= 0 \\
 \Rightarrow (3 - \mu) \cdot (18 - \mu) - 36 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 54 - 3\mu - 18\mu + \mu^2 - 36 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \mu^2 - 21\mu + 18 &= 0 \\
 \mu_{1,2} &= \frac{21}{2} \pm \sqrt{\frac{441}{4} - \frac{72}{4}} = \frac{21}{2} \pm \sqrt{\frac{369}{4}} \\
 \mu_{1,2} &= \frac{21}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{41} \\
 \Rightarrow \|M^{-1}\|_2 &= |\mu_1| \\
 &= \left(\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{41} \right) \\
 &= \frac{3}{2}(7 + \sqrt{41})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \kappa(M) &= \|M\|_2 \cdot \|M^{-1}\|_2 \\
&= \frac{1}{12} \cdot (7 + \sqrt{41}) \cdot \frac{3}{2} \cdot (7 + \sqrt{41}) \\
&= \frac{1}{8} \cdot (7 + \sqrt{41})^2 \\
&= \frac{1}{8} \cdot (49 + 14\sqrt{41} + 41) \\
&= \frac{1}{8} \cdot (90 + 14\sqrt{41}) \\
&= \frac{1}{4} \cdot (45 + 7\sqrt{41})
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$M := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Bestimmung von Näherungswerten für den dominanten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor der Matrix M mittels einfacher Vektoriteration:

Startvektor $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; da u_0 normiert: $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
u_1 &= Mv_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
v_1 &= \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{9}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
v_1 &\approx \begin{pmatrix} 0.948683 \\ 0.316228 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Rayleigh-Quotienten $R_M(v_k)$ konvergieren gegen den dominanten Eigenwert λ_1 .

$$R_M(v_0) = \frac{v_0^T \overbrace{Mv_0}^{u_1}}{\underbrace{v_0^T v_0}_{=1}} = v_0^T u_1 = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= Mv_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{7}{6\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} \\
|u_2| &= \frac{1}{6\sqrt{10}} \cdot \sqrt{449} \\
\Rightarrow v_2 &= \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{449}} \cdot \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{449}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} \\
v_2 &\approx \begin{pmatrix} 0.943858 \\ 0.330350 \end{pmatrix} \\
R_M(v_1) &= v_1^T u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3, 1) \cdot \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{60} \cdot 67 = \frac{67}{60} \\
R_M(v_1) &\approx 1.1166667
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{449}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{449}} \begin{pmatrix} \frac{67}{3} \\ \frac{47}{6} \end{pmatrix} \\
u_3 &= \frac{1}{6\sqrt{449}} \begin{pmatrix} 134 \\ 47 \end{pmatrix} \\
|u_3| &= \frac{1}{6\sqrt{449}} \sqrt{20165} \\
\Rightarrow v_3 &= \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{1}{\sqrt{20165}} \begin{pmatrix} 134 \\ 47 \end{pmatrix} \\
v_3 &\approx \begin{pmatrix} 0.943639 \\ 0.330978 \end{pmatrix} \\
R_M(v_2) &= v_2^T u_3 = \frac{1}{\sqrt{449}} \cdot (20, 7) \cdot \frac{1}{6\sqrt{449}} \begin{pmatrix} 134 \\ 47 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2694} \cdot 3009 = \frac{3009}{2694} \\
R_M(v_2) &\approx 1.1169265
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{20165}} \begin{pmatrix} 134 \\ 47 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{20165}} \begin{pmatrix} \frac{449}{3} \\ \frac{315}{6} \end{pmatrix} \\
u_4 &= \frac{1}{6\sqrt{20165}} \begin{pmatrix} 898 \\ 315 \end{pmatrix} \\
|u_4| &= \frac{1}{6\sqrt{20165}} \sqrt{905629} \\
\Rightarrow v_4 &= \frac{u_4}{|u_4|} = \frac{1}{\sqrt{905629}} \begin{pmatrix} 898 \\ 315 \end{pmatrix} \\
v_4 &\approx \begin{pmatrix} 0.943629 \\ 0.331006 \end{pmatrix} \\
R_M(v_3) &= v_3^T u_4 = \frac{1}{\sqrt{20165}} \cdot (134, 47) \cdot \frac{1}{6\sqrt{20165}} \begin{pmatrix} 898 \\ 315 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{120990} \cdot 135137 = \frac{135137}{120990} \\
R_M(v_3) &\approx 1.1169270
\end{aligned}$$

Vergleicht man die letzte Approximation mit $\lambda_1 = \frac{7}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{41} \approx 1.1169270$ auf Aufgabe 1 (b) erkennt man deren Genauigkeit.

Ein normierter Eigenvektor v zum dominanten Eigenwert $\lambda_1 = \frac{7}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{41}$:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|c} \frac{5}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{41} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{41} & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 - \sqrt{41} & 4 & 0 \\ 4 & -5 - \sqrt{41} & 0 \end{array} \right) \\
&\left(\begin{array}{cc|c} -20 + 4\sqrt{41} & -16 & 0 \\ 20 - 4\sqrt{41} & 16 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 - \sqrt{41} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Sei $u_1 = 4 \Rightarrow u_2 = \sqrt{41} - 5$

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{41} - 5 \end{pmatrix}$$

normieren:

$$\begin{aligned}
|u| &= \sqrt{16 + 41 - 10\sqrt{41} + 25} = \sqrt{82 - 10\sqrt{41}} \approx 4.23896 \\
\Rightarrow \text{Eigenvektor } v &= \frac{1}{\sqrt{82 - 10\sqrt{41}}} \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{41} - 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.9436283 \\ 0.3310069 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Man bildet im n -ten Schritt des Verfahrens aus der Matrix $A = (a_{kl})_{k,l=1,\dots,N}$ die Matrix $\tilde{A} := O_n^T A O_n$ mit $O_n = Q(i, j, \varphi_n)$, O_n wie auf dem Aufgabenblatt angegeben, für $-\frac{\pi}{4} < \varphi_n \leq \frac{\pi}{4}$. Für die transformierte Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{kl})_{k,l=1,\dots,N}$ soll gelten:

$$\tilde{a}_{ij} = 0 \quad \wedge \quad \tilde{a}_{ji} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq N$$

Achtung: Die auf dem Aufgabenblatt für φ_n angegebene Formel ist nur dann richtig, wenn in der Matrix O_n die Terme $\sin(\varphi_n)$ durch $-\sin(\varphi_n)$ ersetzt werden. Für die auf dem Aufgabenblatt definierte Matrix O_n muss die Behauptung lauten:

Behauptung:

Damit für die transformierte Matrix $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = 0$ gilt, muss der Drehwinkel φ_n gemäß der Formel

$$\varphi_n = \arctan \frac{a_{ii} - a_{jj} \pm \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}}$$

gewählt werden, wobei für $\pm$ das Operationszeichen $+$ zu wählen ist, wenn $a_{jj} > a_{ii}$, jedoch $-$, wenn $a_{jj} < a_{ii}$. D.h.: die Doppelindizes ii und jj sind zu vertauschen.

Beweis der Behauptung:

Berechnet man $\tilde{A} := O_n^T A O_n$, so erhält man $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (\tilde{a}_{ji})_{i,j=1,\dots,N}$ mit

$$\tilde{a}_{mi} = \tilde{a}_{im} = a_{mi} \cdot \cos(\varphi_n) - a_{mj} \cdot \sin(\varphi_n), \quad m \neq i, j \quad (1)$$

$$\tilde{a}_{mj} = \tilde{a}_{jm} = a_{mj} \cdot \cos(\varphi_n) + a_{mi} \cdot \sin(\varphi_n), \quad m \neq i, j \quad (2)$$

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} \cdot \cos^2(\varphi_n) - 2a_{ij} \cos(\varphi_n) \sin(\varphi_n) + a_{jj} \sin^2(\varphi_n) \quad (3)$$

$$\tilde{a}_{jj} = a_{jj} \cdot \cos^2(\varphi_n) - 2a_{ij} \cos(\varphi_n) \sin(\varphi_n) + a_{ii} \sin^2(\varphi_n) \quad (4)$$

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = (a_{ii} - a_{jj}) \cdot \cos(\varphi_n) \sin(\varphi_n) + a_{ij} (\cos^2(\varphi_n) - \sin^2(\varphi_n)) \quad (5)$$

$$\tilde{a}_{mp} = a_{mp} \quad \text{sonst} \quad (6)$$

Aus der Forderung $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = 0$ folgt gemäß (5):

$$(a_{ii} - a_{jj}) \cdot \cos(\varphi_n) \sin(\varphi_n) + a_{ij} (\cos^2(\varphi_n) - \sin^2(\varphi_n)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (a_{ii} - a_{jj}) \sin(2\varphi_n) + a_{ij} \cos(2\varphi_n) = 0 \quad (*)$$

$$\text{mit } -\frac{\pi}{4} < \varphi_n \leq \frac{\pi}{4}$$

Für $a_{ii} - a_{jj} = 0 \Leftrightarrow a_{ii} = a_{jj}$ folgt aus (*):

$$\begin{aligned}\underbrace{a_{ij}}_{\neq 0} \cdot \cos(2\varphi_n) &= 0 \\ \Rightarrow \cos(2\varphi_n) &= 0 \\ \Rightarrow 2\varphi_n &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \varphi_n &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Für $a_{ii} = a_{jj}$ folgt aus der Formel für φ_n :

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \arctan \frac{\pm \sqrt{4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} \\ &= \arctan \left(\pm \sqrt{\frac{4a_{ij}^2}{4a_{ij}^2}} \right) \\ &= \arctan(\pm 1)\end{aligned}$$

und somit $\varphi_n = \frac{\pi}{4}$, wenn man für $\pm$ das Operationszeichen $+$ wählt.

Die Behauptung gilt also für den Fall $a_{ii} = a_{jj}$; in diesem Fall ist $\varphi_n = \frac{\pi}{4}$ zu wählen.

Sei nun $a_{ii} \neq a_{jj}$:

Dann ist $\varphi_n \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[\Rightarrow 2\varphi_n \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ und $\cos(2\varphi_n) > 0$.

Dann folgt aus (*):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a_{ii} - a_{jj}) \cdot \tan(2\varphi_n) + a_{ij} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (a_{ii} - a_{jj}) \cdot \frac{2\tan(\varphi_n)}{1 - \tan^2(\varphi_n)} + a_{ij} &= 0 \quad (**)\end{aligned}$$

Zwischenbemerkung:

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{4} < \varphi_n < \frac{\pi}{4} &\Rightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \tan(\varphi_n) < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ da } \tan \nearrow \text{ in } \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[\\ \Rightarrow -1 < \tan(\varphi_n) < 1 \\ \Rightarrow \tan^2(\varphi_n) < 1 \\ \Leftrightarrow 1 - \tan^2(\varphi_n) > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(**) \Leftrightarrow (a_{ii} - a_{jj}) \cdot \tan(\varphi_n) + a_{ij} - a_{ij}\tan^2(\varphi_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{ij}\tan^2(\varphi_n) - (a_{ii} - a_{jj})\tan(\varphi_n) - a_{ij} &= 0 \\ \tan^2(\varphi_n) - \frac{a_{ii} - a_{jj}}{a_{ij}}\tan(\varphi_n) - 1 &= 0\end{aligned}$$

Setze $\tan(\varphi_n) =: t$

$$\Rightarrow t^2 - \frac{a_{ii} - a_{jj}}{a_{ij}}t - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}} \pm \sqrt{\frac{(a_{ii} - a_{jj})^2}{4a_{ij}^2} + \frac{4a_{ij}^2}{4a_{ij}^2}} \\ t_{1,2} &= \frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}} \pm \frac{\sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2|a_{ij}|} \\ t &= \begin{cases} \frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}} \pm \frac{\sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}}, & a_{ij} > 0 \\ \frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}} \mp \frac{\sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}}, & a_{ij} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} t = \tan(\varphi_n) &= \frac{a_{ii} - a_{jj} \pm \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} \\ \Rightarrow \varphi_n &= \arctan \frac{a_{ii} - a_{jj} \pm \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} \end{aligned}$$

1. Fall: $a_{jj} < a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} - a_{jj} > 0$

$\boxed{*}$ In diesem Fall ist das Operationszeichen $-$ zu wählen.

Beweis:

Fall $a_{ij} > 0$:

Annahme: $\boxed{*}$ gilt nicht

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a_{ii} - a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} &> \frac{a_{ii} - a_{jj} + \sqrt{4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} \\ &= \frac{a_{ii} - a_{jj} + 2a_{ij}}{2a_{ij}} \\ &= \underbrace{\frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}}}_{>0} + 1 \\ &> 1 \\ \Rightarrow \tan(\varphi_n) > 1 &\Rightarrow \varphi_n \notin \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

Also gilt $\boxed{*}$.

Fall $a_{ij} < 0$:

Annahme: $\boxed{*}$ gilt nicht

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{a_{ii} - a_{jj} + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} &< \frac{a_{ii} - a_{jj} + \sqrt{4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} \\
&= \frac{a_{ii} - a_{jj} - 2a_{ij}}{2a_{ij}} \\
&= \underbrace{\frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}}}_{<0} - 1 \\
&< -1 \\
\Rightarrow \tan(\varphi_n) < -1 \Rightarrow \varphi_n \notin \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]
\end{aligned}$$

Also gilt $\boxed{*}$.

2. Fall: $a_{jj} > a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} - a_{jj} < 0$

$\boxed{**}$ In diesem Fall ist das Operationszeichen $+$ zu wählen.

Beweis:

Fall $a_{ij} > 0$

Annahme: $\boxed{**}$ gilt nicht

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{a_{ii} - a_{jj} - \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} &< \frac{a_{ii} - a_{jj} - \sqrt{4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} \\
&= \frac{a_{ii} - a_{jj} - 2a_{ij}}{2a_{ij}} \\
&= \underbrace{\frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}}}_{<0} - 1 \\
&< -1 \\
\Rightarrow \tan(\varphi_n) < -1 \Rightarrow \varphi_n \notin \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]
\end{aligned}$$

Also gilt $\boxed{**}$.

Fall $a_{ij} < 0$

Annahme: $\boxed{**}$ gilt nicht

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{a_{ii} - a_{jj} - \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} &> \frac{a_{ii} - a_{jj} - \sqrt{4a_{ij}^2}}{2a_{ij}} \\
&= \frac{a_{ii} - a_{jj} + 2a_{ij}}{2a_{ij}} \\
&= \underbrace{\frac{a_{ii} - a_{jj}}{2a_{ij}}}_{>0} + 1 \\
&> 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi_n) > 1 \Rightarrow \varphi_n \notin \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Also gilt **.

□

Aufgabe 4

Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$; sei $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $x := (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

Betrachte die Funktion

$$N_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \ln\|x - y\|$$

$$\text{Aus } x - y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \text{ folgt:}$$

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \sqrt{(x - y)(x - y)} = \sqrt{\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_y(x_1, x_2) = \ln\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

(a)

$$\text{grad } N_y(x) := \nabla N_y(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_y}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial N_y}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_y}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot (x_1 - y_1)}{2 \cdot \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} \\ &= \frac{x_1 - y_1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_y}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot (x_2 - y_2)}{2 \cdot \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} \\ &= \frac{x_2 - y_2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\text{grad } N_y(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ \frac{x_2 - y_2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}
HN_y(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \\
\frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_1 - y_1) \cdot 2(x_1 - y_1)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} \\
&= \frac{(x_2 - y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} \\
\frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1 \partial x_2} &:= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial N_y}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{0 \cdot [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2] - (x_2 - y_2) \cdot 2(x_1 - y_1)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} \\
&= \frac{-2(x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2}
\end{aligned}$$

Nach dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz gilt:

$$\frac{\partial^2 N_y}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ da } N_y \text{ eine } C^2\text{-Funktion ist.}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 N_y}{\partial x_2^2} &= \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_2 - y_2) \cdot 2(x_2 - y_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} \\
&= \frac{(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2}
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$HN_y(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{-(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} & \frac{-2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} \\ \frac{-2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} & \frac{(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^2} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 N_y}{\partial x_2^2} &= -\frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1^2} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_2^2} &= 0
\end{aligned}$$

Für den Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, angewendet auf N_y ergibt sich:

$$\Delta N_y = \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x_2^2} = 0$$

Demnach ist die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ definierte Funktion $N_y(x) = \ln \|x - y\|$ Lösung der Potentialgleichung $\Delta N_y = 0$. Deshalb ist $N_y(x)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ harmonisch.