

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 4
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

$$y = \frac{x}{x+1}, \quad x \neq -1$$

$$\begin{aligned} xy - x + y &= 0 \\ (x, y) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \lambda^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor v'_1 zu $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{z.B. } v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ normiert: } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ein Eigenvektor v'_2 zu $\lambda_2 = \frac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{z.B. } v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ normiert: } v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q := (v_1 | v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q ist eine orthogonale Matrix mit $\det Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (1+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &=: \Lambda \end{aligned}$$

$$\tilde{b} := Q^T b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\tilde{b} = Q^T b$ ergibt sich die Darstellung:

$$z^T \Lambda z + \tilde{b}^T z = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (z_1, z_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} (-2, 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ -\frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 - \sqrt{2} \cdot z_1 &= 0 \\ \frac{1}{2} z_2^2 - \frac{1}{2} \cdot (z_1^2 + 2\sqrt{2} \cdot z_1 + 2) + 1 &= 0 \\ \frac{1}{2} z_2^2 - \frac{1}{2} (z_1 + \sqrt{2})^2 + 1 &= 0 \\ \frac{1}{2} (z_1 + \sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} z_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Setze: $\zeta_1 := z_1 + \sqrt{2}$ und $\zeta_2 := z_2$

$$\Rightarrow \frac{\zeta_1^2}{2} - \frac{\zeta_2^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{\zeta_1^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{\zeta_2^2}{(\sqrt{2})^2} - 1 = 0 \quad \text{Hyperbel}$$

Aufgabe 2

$$q(x) = 3x^2 + 6xy - 5y^2 + \frac{6}{5}\sqrt{10} \cdot x - \frac{18}{5}\sqrt{10} \cdot y - 10 = 0$$

Transformation der Quadrik $q(x) = 0$ in Normalform:

Umbenennung der Variablen: $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow q(x) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2 + \frac{6}{5}\sqrt{10} \cdot x_1 - \frac{18}{5}\sqrt{10} \cdot x_2 - 10 = 0$$

Stelle $q(x)$ in der Form $q(x) = x^T Ax + b^T x + c = 0$ dar:

$$q(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{6}{5}\sqrt{10}(1, -3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 10 = 0$$

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \quad b := \frac{6}{5}\sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad c = -10$$

Eigenwerte von A

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 3 \\ 3 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (3 - \lambda)(-5 - \lambda) - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow -15 - 3\lambda + 5\lambda + \lambda^2 - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= -6 \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor v'_1 zu $\lambda_1 = 4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

z.B. $v'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; normiert: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Eigenvektor v'_2 zu $\lambda_2 = -6$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

z.B. $v'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; normiert: $v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$Q := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Q ist eine orthogonale Matrix mit

$$\begin{aligned}
 \det Q &= \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 (9+1) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1 \\
 Q^T A Q &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 4 & -18 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & -60 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\
 &=: \Lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{b} &:= Q^T b = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{6}{5} \sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Mit $y := Q^T x$ und $\tilde{b} := Q^T b$ ergibt sich aus $x^T A x + b^T x + c = 0$ die Darstellung

$$y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c = 0$$

$$\begin{aligned}
 (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (0, -12) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - 10 &= 0 \\
 4y_1^2 - 6y_2^2 - 12y_2 - 10 &= 0 \\
 4y_1^2 - 6(y_2^2 + 2y_2 + 1) - 10 + 6 &= 0 \\
 4y_1^2 - 6(y_2 + 1)^2 - 4 &= 0
 \end{aligned}$$

Setze $\eta_1 := y_1$ und $\eta_2 := y_2 + 1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 4\eta_1^2 - 6\eta_2^2 - 4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \eta_1^2 - \frac{3}{2}\eta_2^2 - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \eta_1^2 - \frac{\eta_2^2}{\frac{6}{9}} - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\eta_1^2}{1^2} - \frac{\eta_2^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} - 1 &= 0 \quad \text{Normalform}
 \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Hyperbel; sie hat den Mittelpunkt $M''(0|0)$.
 Maß des Winkels φ zwischen den Hauptachsen und den Koordinatenachsen
 des ursprünglichen Koordinatensystems:

Aus $Q = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \wedge \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \Rightarrow \varphi &= 18.43^\circ \\ \Rightarrow \varphi &= 0.3222 \text{ rad} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Quadrik

$$q(\xi) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 9z^2 + \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 36z + 6 = 0$$

soll auf Normalform gebracht werden.

Lösung:

$$q(\xi) = \xi^T A \xi + b^T \xi + c = 0$$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 36) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 6 = 0$$

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \\ 36 \end{pmatrix}; \quad c = 6$$

Bemerkung: $\text{rang}(A) = 2$, also ein Eigenwert $= 0$.

Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (4 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \cdot (9 - \lambda) - 4 \cdot (9 - \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 49\lambda + 36 - 36 + 4\lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 45\lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda \cdot (\lambda^2 - 14\lambda + 45) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda \cdot (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_3 &= 0 \\ \vee \lambda_2 &= 5 \\ \vee \lambda_1 &= 9 \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor v'_1 zu $\lambda_1 = 9$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$v'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ normiert: } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ein Eigenvektor v'_2 zu $\lambda_2 = 5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$v'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ normiert: } v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Eigenvektor v'_3 zu $\lambda_3 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

$$v'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ normiert: } v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix mit

$$\det Q = \frac{1}{5\sqrt{5}}(4\sqrt{5} + \sqrt{5}) = 1$$

$$\begin{aligned}
Q^T A Q &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 9\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&=: \Lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b} := Q^T b &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \\ 36 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 36\sqrt{5} \\ 0 \\ -5\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit $\eta := Q^T \xi$ und $\tilde{b} := Q^T b$ ergibt sich aus $\xi^T A \xi + b^T \xi + c = 0$ die Darstellung

$$\eta^T \Lambda \eta + \tilde{b}^T \eta + c = 0$$

$$\begin{aligned}
(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + (36, 0, -5) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + 6 &= 0 \\
(9\eta_1, 5\eta_2, 0) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + (36, 0, -5) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + 6 &= 0 \\
9\eta_1^2 + 5\eta_2^2 + 36\eta_1 - 5\eta_3 + 6 &= 0 \\
9 \cdot (\eta_1^2 + 4\eta_1 + 4) - 36 + 5\eta_2^2 - 5\eta_3 + 6 &= 0 \\
9 \cdot (\eta_1 + 2)^2 + 5\eta_2^2 - 5\eta_3 - 30 &= 0 \\
9 \cdot (\eta_1 + 2)^2 + 5\eta_2^2 - 5 \cdot (\eta_3 + 6) &= 0
\end{aligned}$$

Elimination der Konstanten durch $\eta'_3 := \eta_3 + 6$

$$\Rightarrow 9 \cdot (\eta_1 + 2)^2 + 5\eta_2^2 - 5\eta'_3 = 0$$

Setze: $\xi_1 := \eta_1 + 2$ und $\xi_2 := \eta_2$ und $\xi_3 = \eta'_3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9\xi_1^2 + 5\xi_2^2 - 5\xi_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\xi_1^2}{5} + \frac{\xi_2^2}{9} - \frac{1}{9}\xi_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\xi_1^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{\xi_2^2}{3^2} - 2 \cdot \frac{1}{18}\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein elliptisches Paraboloid

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} - 2p\xi_3 = 0 \quad \text{mit } a = \sqrt{5}; \quad b = 3; \quad p = \frac{1}{18}$$

Aufgabe 4

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

(a) Gesamtnorm: $\|A\|_G = 3 \cdot 2 = 6$

(b) Zeilensummennorm: $\|A\|_Z = \max\{2; 4; 4\} = 4$

(c) Frobeniusnorm: $\|A\|_F := \left(\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\|A\|_F = (1^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$$

(d) Spektralnorm: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$
Berechne $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $A^T A$:

$$\begin{aligned} \det(A^T A - \lambda \cdot I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (3 - \lambda)(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 8 - 8 - (6 - \lambda) - 4(5 - \lambda) - 16(3 - \lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow 90 - 18\lambda - 45\lambda + 9\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 16 - 6 + \lambda - 20 + 4\lambda - 48 + 16\lambda = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42) = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vee \lambda^2 - 14\lambda + 42 = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_{2,3} = 7 \pm \sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max\{0; 7 + \sqrt{7}; 7 - \sqrt{7}\} = 7 + \sqrt{7} = \lambda_{\max}(A^T A) \\
&\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{7 + \sqrt{7}}
\end{aligned}$$