

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 3
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Orthonormalbasen

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T, \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T \right\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

und

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \frac{1}{7}(3, -6, 2)^T, \frac{1}{7}(2, 3, 6)^T, \frac{1}{7}(6, 2, -3)^T \right\} = \{w_1, w_2, w_3\}$$

(a)

Für die gesuchte Transformationsmatrix (=Übergangsmatrix) T von $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gilt (nach Vorlesung):

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ w_3^T \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3) \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7 \cdot \sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -9\sqrt{3} & 7 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 7 & 11\sqrt{2} \\ -4\sqrt{3} & -14 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{7\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{7\sqrt{3}} \\ \frac{1}{7\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11}{7\sqrt{3}} \\ -\frac{4}{7\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{5}{7\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

Gegeben: $b_1 = (-3, 2, 1)^T \in \mathbb{R}^3$ bezügl $\mathcal{B}_1$

Gesucht: Koordinatenvektor b_2 von b_1 bezügl. $\mathcal{B}_2$

Lösung:

Es gilt:

$$b_2 = T b_1$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{7\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -9\sqrt{3} & 7 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 7 & 11\sqrt{2} \\ -4\sqrt{3} & -14 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 27\sqrt{3} & 14 & -\sqrt{2} \\ -3\sqrt{3} & 14 & 11\sqrt{2} \\ 12\sqrt{3} & -28 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{27\sqrt{3}+14-\sqrt{2}}{7\sqrt{6}} \\ \frac{-3\sqrt{3}+14+11\sqrt{2}}{7\sqrt{6}} \\ \frac{12\sqrt{3}-28+5\sqrt{2}}{7\sqrt{6}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmung der Eigenwerte von A :

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \cdot (-5-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 54 - 54 - 18 \cdot (-5-\lambda) + 9 \cdot (4-\lambda) + 18 \cdot (1-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + 21\lambda - 20 - 108 + 90 + 18\lambda + 36 - 9\lambda + 18 - 18\lambda \\
&= -\lambda^3 + 12\lambda + 16
\end{aligned}$$

Charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$

Nullstellen von χ_A :

$$-\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

Polynomdivision: $(-\lambda^3 + 12\lambda + 16) : (\lambda + 2) = -\lambda^2 + 2\lambda + 8$

$$-\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = 4$$

Ergebnis: Die Eigenwerte von A sind $\lambda_{1,2} = -2$ und $\lambda_3 = 4$.

2. (a)

Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = -2$ ist Lösungsraum von

$$A + 2 \cdot I = 0$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A + 2 \cdot I) = 1$$

$$\Rightarrow \dim \text{Eig}(A, -2) = \dim \text{Ker}(A + 2 \cdot I) = 2$$

Seien $x_3 = t$, $x_2 = s \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x_1 - 3s + 3t &= \\ \Leftrightarrow x_1 &= s - t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Ker}(A + 2 \cdot I) = \text{Eig}(A, -2) &= \left\{ \begin{pmatrix} s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

(b)

$\Rightarrow$ Eine Basis $\mathcal{B}_1$ des 2-dim. Eigenraums $\text{Eig}(A, -2)$ ist z.B.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. (a)

Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$ ist Lösungsraum von

$$A - 4 \cdot I = 0$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A - 4 \cdot I) = 2$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(A, 4) = \dim \operatorname{Ker}(A - 4 \cdot I) = 1$$

Sei $y_3 = 2 \cdot r$ mit $r \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow -12y_2 + 6 \cdot 2r &= 0 \Leftrightarrow y_2 = r \\ \Rightarrow -3y_1 - 3r + 6r &= 0 \Leftrightarrow y_1 = r \\ \Rightarrow \operatorname{Ker}(A - 4 \cdot I) = \operatorname{Eig}(A, 4) &= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ r \\ 2r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

(b)

$\Rightarrow$ Eine Basis $\mathcal{B}_2$ des 1-dim. Eigenraums $\operatorname{Eig}(A, 4)$ ist z.B.

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } b \neq 0$$

Gesucht: Eine orthogonale Matrix Q , die A diagonalisiert.

Lösung:

Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - \lambda)^2 - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - a)^2 &= b^2 \\ \Leftrightarrow |\lambda - a| &= |b| \\ \Leftrightarrow \lambda - a = |b| \vee \lambda - a = -|b| \\ \Leftrightarrow \lambda = a + |b| \vee \lambda' = a - |b| \end{aligned}$$

Für $b > 0$ ist $\lambda = a + b$ und $\lambda' = a - b$.

Für $b < 0$ ist $\lambda = a - b$ und $\lambda' = a + b$.

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 := a + b$ und $\lambda_2 := a - b$. Wegen $b \neq 0$ gilt: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Eigenraum zu $\lambda_1 = a + b$:

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -b & b & 0 \\ b & -b & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow -bx_1 + bx_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0 \quad (\text{da } b \neq 0)$$

Sei $x_2 = s \in \mathbb{R}$ bel. $\Rightarrow x_1 = s$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, a + b) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ein Eigenvektor } v'_1 \text{ zu } \lambda_1 = a + b \text{ ist } v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung ergibt

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum zu $\lambda_2 = a - b$:

$$\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} b & b & 0 \\ b & b & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow by_1 + by_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 = 0 \quad (\text{da } b \neq 0)$$

Sei $y_2 = t \in \mathbb{R}$ bel. $\Rightarrow y_1 = -t$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, a - b) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ein Eigenvektor } v'_2 \text{ zu } \lambda_2 = a - b \text{ ist } v'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung ergibt

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$Q = (v_1|v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

lässt sich auf Diagonalgestalt transformieren, und zwar folgendermaßen:

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(a+b) & 0 \\ 0 & 2(a-b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(a+b, a-b) \end{aligned}$$

Hierbei stehen in der Hauptdiagonalen der Diagonalmatrix gerade die Eigenwerte von A . $\square$

Aufgabe 4

Gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Eine Orthogonalmatrix V und eine Diagonalmatrix D , sodass gilt:

$$A = V D V^T$$

Lösung:

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist symmetrisch. Dann hat A (gem. Vorlesung) ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dann ist die gesuchte Orthogonalmatrix

$$V = (v_1|v_2|v_3)$$

und die Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

1. Bestimmung der 3 (reellen) Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A :
 Charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$

$$\begin{aligned}
 \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -36 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ -36 & 0 & -23-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-2-\lambda)(-3-\lambda)(-23-\lambda) - 36^2 \cdot (-3-\lambda) \\
 &= (-1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+23) + 36^2 \cdot (\lambda+3) \\
 &= (\lambda+3)(-\lambda^2 - 25\lambda - 46 + 1296) \\
 &= (\lambda+3)(-\lambda^2 - 25\lambda + 1250) \\
 &= (-1)(\lambda+3)(\lambda^2 + 25\lambda - 1250) \\
 &= (-1)(\lambda+3)(\lambda-25)(\lambda+50)
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$ sind die Eigenwerte von A :

$$\lambda_1 = -3; \quad \lambda_2 = 25; \quad \lambda_3 = -50$$

2.

$$\Rightarrow D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$$

3. Bestimmung von zugehörigen Eigenvektoren zu:

(a)

$\lambda_1 = -3$:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & -20 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -1316 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 &x_3 = 0; \quad x_2 = s \in \mathbb{R} \text{ bel.}; \quad x_1 = 0 \\
 &\Rightarrow \text{Eig}(A, -3) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}
 \end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = -3$ ist:

$$v'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix} -27 & 0 & -36 \\ 0 & -28 & 0 \\ -36 & 0 & -48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -27 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & -28 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & -48 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -27 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & -28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$y_2 = 0; y_3 = 3 \cdot r \text{ mit } r \in \mathbb{R} \text{ bel.}; y_1 = -4r$$
$$\Rightarrow \text{Eig}(A, 25) = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 25$ ist:

$$v'_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$\lambda_3 = -50$:

$$\begin{pmatrix} 48 & 0 & -36 \\ 0 & 47 & 0 \\ -36 & 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 48 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 47 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 27 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 48 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$z_2 = 0; z_3 = 4 \cdot t \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ bel.}; z_1 = 3t$$
$$\Rightarrow \text{Eig}(A, -50) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -50$ ist:

$$v'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Die Normierung der Eigenvektoren v'_1, v'_2, v'_3 liefert die benötigten Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 der Orthogonalmatrix V :

$$|v'_1| = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|v'_2| = 5 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|v'_3| = 5 \Rightarrow v_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = (v_1|v_2|v_3) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V^T = (v_1|v_2|v_3)^T = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} A &= V D V^T \\ A &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 42 \\ 0 & 112 & 42 \\ 42 & 42 & 161 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist symmetrisch. Untersuche mit dem Hauptminorenkriterium, ob A positiv definit ist:

Berechne die Hauptminoren:

$$\begin{aligned} |70| &= 70 > 0 \\ \begin{vmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 112 \end{vmatrix} &= 70 \cdot 112 > 0 \\ \begin{vmatrix} 70 & 0 & 42 \\ 0 & 112 & 42 \\ 42 & 42 & 161 \end{vmatrix} &= 14 \cdot 14 \cdot 7 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ 6 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot 7^3 \cdot (920 - 144 - 90) = 2^3 \cdot 7^3 \cdot 686 > 0 \end{aligned}$$

Ergebnis: A ist positiv definit.

Dann existiert (gem. Vorlesung) eine (positiv definite) Matrix $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $M^2 = A$

Berechnung von M :

Bestimme dazu zunächst die Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{ccc} 70 - \lambda & 0 & 42 \\ 0 & 112 - \lambda & 42 \\ 42 & 42 & 161 - \lambda \end{array} \right| \stackrel{\lambda=7\mu}{=} \left| \begin{array}{ccc} 70 - 7\mu & 0 & 42 \\ 0 & 112 - 7\mu & 42 \\ 42 & 42 & 161 - 7\mu \end{array} \right| \\
 &= 7^3 \cdot \left| \begin{array}{ccc} 10 - \mu & 0 & 6 \\ 0 & 16 - \mu & 6 \\ 6 & 6 & 23 - \mu \end{array} \right| \\
 &= 7^3 \cdot [(10 - \mu) \cdot (16 - \mu) \cdot (23 - \mu) - 36 \cdot (16 - \mu) - 36 \cdot (10 - \mu)] \\
 &= 7^3 \cdot [3680 - 758\mu + 49\mu^2 - \mu^3 - 36 \cdot (26 - 2\mu)] \\
 &= 7^3 \cdot [-\mu^3 + 49\mu^2 - 686\mu + 2744] \\
 &= \chi_A(\mu)
 \end{aligned}$$

Nullstellen von $\chi_A(\mu)$:

$$\begin{aligned}
 \mu^3 - 49\mu^2 + 686\mu - 2744 &= 0 \\
 \mu_1 &= 7 \text{ ist Lösung}
 \end{aligned}$$

Polynomdivision:

$$(\mu^3 - 49\mu^2 + 686\mu - 2744) : (\mu - 7) = \mu^2 - 42\mu + 392$$

Löse:

$$\begin{aligned}
 \mu^2 - 42\mu + 392 &= 0 \\
 \mu_{2,3} &= 21 \pm \sqrt{441 - 392} \\
 &= 21 \pm 7 \\
 \mu_2 &= 14 \\
 \mu_3 &= 28
 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich aus $\lambda = 7 \cdot \mu$ die Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = 7 \cdot \mu_1 &= 49 = 1 \cdot 7^2 \\
 \lambda_2 = 7 \cdot \mu_2 &= 98 = 2 \cdot 7^2 \\
 \lambda_3 = 7 \cdot \mu_3 &= 196 = 4 \cdot 7^2
 \end{aligned}$$

Bestimmung eines Eigenvektors $v'_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 49$:

$$\begin{pmatrix} 21 & 0 & 42 & | & 0 \\ 0 & 63 & 42 & | & 0 \\ 42 & 42 & 112 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 \\ 3 & 3 & 8 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $x_3 = -3 \Rightarrow x_2 = 2, x_1 = 6$.

$$\Rightarrow v'_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmung eines Eigenvektors $v'_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = 98$:

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 & 42 & | & 0 \\ 0 & 14 & 42 & | & 0 \\ 42 & 42 & 63 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $y_3 = 2 \Rightarrow y_2 = -6, y_1 = 3$.

$$\Rightarrow v'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung eines Eigenvektors $v'_3 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_3 = 196$:

$$\begin{pmatrix} -126 & 0 & 42 & | & 0 \\ 0 & -84 & 42 & | & 0 \\ 42 & 42 & -35 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 6 & 6 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 6 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $z_3 = 6 \Rightarrow z_2 = 3, z_1 = 2$.

$$\Rightarrow v'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Die Vektormenge

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \frac{1}{7}(6, 2, -3)^T, \frac{1}{7}(3, -6, 2)^T, \frac{1}{7}(2, 3, 6)^T \right\}$$

bildet eine Orthonormalbasis der zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A .

Sei

$$Q := (v_1 | v_2 | v_3) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

und sei

$$\Lambda := \begin{pmatrix} 1 \cdot 7^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 7^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot 7^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Berechne daraus die gesuchte Matrix $M := Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T$:

$$M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42 & 14 & -21 \\ 21\sqrt{2} & -42\sqrt{2} & 14\sqrt{2} \\ 28 & 42 & 84 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 308 + 63\sqrt{2} & 168 - 126\sqrt{2} & 42 + 42\sqrt{2} \\ 168 - 126\sqrt{2} & 154 + 258\sqrt{2} & 210 - 84\sqrt{2} \\ 42 + 42\sqrt{2} & 210 - 84\sqrt{2} & 567 + 28\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 44 + 9\sqrt{2} & 24 - 18\sqrt{2} & 6 + 6\sqrt{2} \\ 24 - 18\sqrt{2} & 22 + 36\sqrt{2} & 30 - 12\sqrt{2} \\ 6 + 6\sqrt{2} & 30 - 12\sqrt{2} & 81 + 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Für diese Matrix M gilt: $M^2 = A$.

(b)

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 31 & 36 & -12 \\ 36 & -23 & 24 \\ -12 & 24 & 41 \end{pmatrix}$$

Untersuche mit dem Hauptminorenkriterium, ob die symmetrische Matrix A auch positiv definit ist:

Berechne die Hauptminoren:

$$\begin{aligned} \left| \frac{31}{3} \right| &= \frac{31}{3} > 0 \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{31}{3} & 12 \\ 12 & -\frac{23}{3} \end{array} \right| &= -\frac{31 \cdot 23}{9} - 12^2 < 0 \end{aligned}$$

Der Hauptminor für $k = 2$ ist negativ.

$\Rightarrow A$ ist nicht positiv definit

$\Rightarrow$ es existiert keine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | M^2 = A$.