

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 2
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

Gegeben: $v_1 = (1, 4, 2)^T$, $v_2 = (-2, -1, 3)^T$, $v_3 = (14, -7, 7)^T$, $u = (5, 2, 9)^T \in \mathbb{R}^3$.

Zu zeigen: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Orthogonalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$.

1. Zeige: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear unabhängig:

$$\begin{aligned} \det(v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 14 \\ 4 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -7 + 28 + 168 + 28 + 56 + 21 \\ &= 294 \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear unabhängig.

Wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist damit $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

2. Zeige: Die Basisvektoren sind paarweise orthogonal:

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= -2 - 4 + 6 = 0 \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= -28 + 7 + 21 = 0 \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= 14 - 28 + 14 = 0 \end{aligned}$$

Damit sind v_1, v_2, v_3 paarweise orthogonal.

Insgesamt: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

3. Ansatz:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 \\ \langle u, v_1 \rangle &= 5 + 8 + 18 = 31 \\ \langle u, v_2 \rangle &= -10 - 2 + 27 = 15 \\ \langle u, v_3 \rangle &= 70 - 14 + 63 = 119 \\ \|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle &= 1 + 16 + 4 = 21 \\ \|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle &= 4 + 1 + 9 = 14 \\ \|v_3\|^2 = \langle v_3, v_3 \rangle &= 196 + 49 + 49 = 294 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} u &= \frac{31}{21} v_1 + \frac{15}{14} v_2 + \frac{119}{294} v_3 \\ u &= \frac{31}{21} v_1 + \frac{15}{14} v_2 + \frac{17}{42} v_3 \\ u &= \frac{1}{42} \cdot (62v_1 + 45v_2 + 17v_3) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

P_2 Prä-Hilbert-Raum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit $\{u_1, u_2, u_3\} = \{1, x, x^2\}$

als Basis des P_2 ; Skalarprodukt $\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(x)v(x)dx$.

Bestimmung einer Orthogonalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ des P_2 mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens:

1. Schritt:

$$\begin{aligned} v_1 &:= u_1 \\ v_1 &:= 1 \end{aligned}$$

2. Schritt:

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\ \langle u_2, v_1 \rangle &= \int_0^1 u_2(x) \cdot v_1(x) dx \\ &= \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \\ \|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle &= \int_0^1 (v_1(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 \\ \Rightarrow v_2 &= x - \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow v_2 &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Schritt:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
 \langle u_3, v_1 \rangle &= \int_0^1 u_3(x) \cdot v_1(x) dx \\
 &= \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \\
 \langle u_3, v_2 \rangle &= \int_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12} \\
 \|v_1\|^2 &= 1 \\
 \|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle &= \int_0^1 (v_2(x))^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] = \frac{1}{12} \\
 \Rightarrow v_3 &= x^2 - \frac{\frac{1}{3}}{1} \cdot 1 - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) \\
 v_3 &= x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 v_3 &= x^2 - x + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Ergebnis: $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 := 1$, $v_2 := x - \frac{1}{2}$ und $v_3 := x^2 - x + \frac{1}{6}$ ist die gesuchte Orthogonalbasis im P_2 (bezügl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

Aufgabe 3

Lösung nach Satz 43.16:

$V = C \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ mit $\langle u, v \rangle := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(x)v(x)dx$ ist ein Prä-Hilbert-Raum; sei $u = \cos(x) \in V$; $W := P_2 =$ Prä-Hilbert-Raum der Polynome vom Grad ≤ 2 im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ ist ein Unterraum von V .

(I)

Bestimme zunächst eine Orthogonalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von W mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens:

Betrachte dazu die Basis $\{u_1, u_2, u_3\} = \{1, x, x^2\}$ von W :

1. Schritt:

$$v_1 := u_1, \text{ also: } v_1 := 1$$

2. Schritt:

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1$$

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \left[x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u_2, v_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_2 &= u_2 - \frac{0}{\pi} \cdot v_1 \\ &= u_2 \\ \Leftrightarrow v_2 &= x \end{aligned}$$

3. Schritt:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
 \langle u_3, v_1 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u_3(x) v_1(x) dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \\
 &= 2 \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} \\
 &= \frac{\pi^3}{12} \\
 \|v_1\|^2 &= \pi \\
 \langle u_3, v_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u_3(x) v_2(x) dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 dx \\
 &= 0 \\
 \|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (v_2(x))^2 dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \\
 &\stackrel{s.o.}{=} \frac{\pi^3}{12} \\
 \Rightarrow v_3 &= x^2 - \frac{\frac{\pi^3}{12}}{\pi} \cdot 1 - \frac{0}{\frac{\pi^3}{12}} \cdot x \\
 \Leftrightarrow v_3 &= x^2 - \frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

Ergebnis: $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 := 1$, $v_2 := x$ und $v_3 := x^2 - \frac{\pi^2}{12}$ ist Orthogonalbasis von W (bezügl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

(II)

Die beste Approximation v von $u = \cos(x) \in V$ in W ist

$$v = \underset{W}{proj} u = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

$$v = \underset{W}{proj} u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3$$

$$\begin{aligned} \langle u, v_1 \rangle &= \langle \cos(x), 1 \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos(x) dx \\ &= [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u, v_2 \rangle &= \langle \cos(x), x \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x \cdot \cos(x)}_{\text{ung. Fkt.}} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u, v_3 \rangle &= \langle \cos(x), x^2 - \frac{\pi^2}{12} \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{12} \right) \cdot \cos(x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x) dx - \frac{\pi^2}{12} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \\ &= \frac{\pi^2 - 8}{2} - \frac{\pi^2}{12} \cdot [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2 - 8}{2} - \frac{\pi^2}{12} \cdot 2 \\ &= \frac{6\pi^2 - 48 - 2\pi^2}{12} \\ &= \frac{4\pi^2 - 48}{12} \\ &= \frac{\pi^2 - 12}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle 1, 1 \rangle \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\
&= [x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle &= \langle x, x \rangle \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \\
&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} \\
&= \frac{\pi^3}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v_3\|^2 = \langle v_3, v_3 \rangle &= \left\langle x^2 - \frac{\pi^2}{12}, x^2 - \frac{\pi^2}{12} \right\rangle \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{12} \right)^2 dx \\
&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{12} \right)^2 dx \\
&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^4 - \frac{\pi^2}{6} x^2 + \frac{\pi^4}{144} \right) dx \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{\pi^2}{18} x^3 + \frac{\pi^4}{144} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{\pi^5}{32} - \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^4}{144} \cdot \frac{\pi}{2} \right] \\
&= 2\pi^5 \cdot \left[\frac{1}{160} - \frac{1}{144} + \frac{1}{288} \right] \\
&= 2\pi^5 \cdot \frac{9 - 10 + 5}{1440} \\
&= 2\pi^5 \cdot \frac{4}{1440} \\
&= \frac{\pi^5}{180}
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 v &= \operatorname{proj}_W u = \frac{2}{\pi} \cdot 1 + \frac{0}{\frac{\pi^3}{12}} \cdot x + \frac{\frac{\pi^2-12}{3}}{\frac{\pi^5}{180}} \cdot \left(x^2 - \frac{\pi^2}{12}\right) \\
 v &= \frac{2}{\pi} + \frac{(\pi^2-12) \cdot 180}{3 \cdot \pi^5} \cdot \left(x^2 - \frac{\pi^2}{12}\right) \\
 v &= \frac{2}{\pi} + 60 \cdot \frac{\pi^2-12}{\pi^5} \cdot x^2 - \frac{(\pi^2-12) \cdot 60 \cdot \pi^2}{\pi^5 \cdot 12} \\
 v &= \frac{2}{\pi} - \frac{5 \cdot (\pi^2-12)}{\pi^3} + 60 \cdot \frac{\pi^2-12}{\pi^5} \cdot x^2 \\
 v &= \frac{2\pi^2-5\pi^2+60}{\pi^3} + 60 \cdot \frac{\pi^2-12}{\pi-5} \cdot x^2 \\
 v &= \frac{60-3\pi^2}{\pi^3} + 60 \cdot \frac{\pi^2-12}{\pi^5} \cdot x^2 \\
 v(x) &= 3 \cdot \frac{20-\pi^2}{\pi^3} - 60 \cdot \frac{12-\pi^2}{\pi^5} \cdot x^2 \\
 v(x) &\approx 0,9801624 - 0,4176978 \cdot x^2
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & , \quad \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

mit $g(x)$ stetig in $[0, 2\pi]$.

Entwicklung von g auf $[0, 2\pi]$ in eine Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)) \\
 \text{mit } a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx \\
 a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \cos(kx) dx \quad , \quad (k = 1, 2, \dots) \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \sin(kx) dx \quad , \quad (k = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) dx \right) \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} + \left[2\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} \pi^2 + 4\pi^2 - 2\pi^2 - 2\pi^2 + \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 \\
 a_0 &= \pi
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x) \cos(kx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \cos(kx) dx + \int_0^{2\pi} (2\pi - x) \cdot \cos(kx) dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \cos(kx) dx + 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \cos(kx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot \cos(kx) dx \right)
 \end{aligned}$$

Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned}
 \int x \cdot \cos(kx) dx &= x \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) - \frac{1}{k} \int \sin(kx) dx \\
 &= \frac{1}{k} x \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cos(kx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[\frac{1}{k} \cdot x \cdot \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cdot \cos(kx) \right]_0^{\pi} + \frac{2\pi}{k} [\sin(kx)]_{\pi}^{2\pi} \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{1}{k} \cdot x \cdot \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cos(kx) \right]_{\pi}^{2\pi} \right)
 \end{aligned}$$

(a)

Falls k gerade:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{2\pi}{k} [0 - 0] - \left[0 + \frac{1}{k^2} - 0 - \frac{1}{k^2} \cdot 1 \right] \right) \\
 a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

(b)

Falls k ungerade:

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{2\pi}{k} \cdot 0 - \left[0 + \frac{1}{k^2} - 0 - \frac{1}{k^2} \cdot (-1) \right] \right) \\a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{k^2} - \frac{2}{k^2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{4}{k^2} \right) \\a_k &= -\frac{4}{\pi \cdot k^2}\end{aligned}$$

Anmerkung:

$$\begin{aligned}\sin(k\pi) &= 0 \quad ; \quad \sin(k \cdot 2\pi) = 0 \\ \cos(k\pi) &= \begin{cases} -1 & , \quad k \text{ ungerade} \\ 1 & , \quad k \text{ gerade} \end{cases} \quad ; \quad \cos(k \cdot 2\pi) = 1\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} g(x) \sin(kx) dx \\b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \sin(kx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \sin(kx) dx \right) \\b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x \cdot \sin(kx) dx + 2\pi \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \sin(kx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot \sin(kx) dx \right)\end{aligned}$$

Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin(kx) dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cos(kx) + \frac{1}{k} \cdot \int \cos(kx) dx \\&= -\frac{1}{k} \cdot x \cdot \cos(kx) + \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\left[-\frac{1}{k} \cdot x \cdot \cos(kx) + \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{2\pi}{k} \cdot [\cos(kx)]_{\pi}^{2\pi} \right. \\&\quad \left. + \left[\frac{1}{k} \cdot x \cdot \cos(kx) - \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx) \right]_{\pi}^{2\pi} \right)\end{aligned}$$

(a)

Falls k gerade:

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{k} \cdot \pi - \frac{2\pi}{k} \cdot [1 - 1] + \left[\frac{1}{k} \cdot 2\pi - \frac{1}{k} \cdot \pi \cdot 1 \right] \right) \\b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{k} \right) \\b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(b)

Falls k ungerade:

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{k} \pi - \frac{2\pi}{k} \cdot [1 - (-1)] + \left[\frac{1}{k} \cdot 2\pi + \frac{1}{k} \cdot \pi \right] \right) \\b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{k} - \frac{4\pi}{k} + \frac{3\pi}{k} \right) \\b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{4}{\pi \cdot 1^2} \right) \cos(x) + \left(-\frac{4}{\pi \cdot 3^2} \right) \cdot \cos(3x) + \left(-\frac{4}{\pi \cdot 5^2} \right) \cdot \cos(5x) + \dots \\g(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right) \\g(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1) \cdot x}{(2k-1)^2}\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Fourier-Entwicklung von g auf $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 5

Def.:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn es ein $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$ (I_n ist die n -reihige Einheitsmatrix).

(I)

Satz:

Die Menge $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A \text{ ist invertierbar}\}$ mit der Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung ist eine Gruppe mit neutralem Element I_n .

Beweis:

(1) $GL(n, \mathbb{R})$ ist bezügl. der Matrizenmultiplikation abgeschlossen, d.h. $A, B \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A \cdot B \in GL(n, \mathbb{R})$.

Begründung: Seien $A, B \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A, B$ sind invertierbar $\stackrel{Def.}{\Leftrightarrow}$ es gibt $A', B' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}A \cdot A' &= A' \cdot A = I_n \\A \cdot B &= B' \cdot B = I_n\end{aligned}$$

Mit $A', B' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist auch $B' \cdot A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiterhin gilt:

$$(B' \cdot A') \cdot (A \cdot B) \stackrel{(*)}{=} B' \cdot (A' \cdot A) \cdot B = B' \cdot I_n \cdot B = B' \cdot B = I_n$$

(*): Assoziativität der Matrizenmultiplikation

Ebenso:

$$(A \cdot B)(B' \cdot A') \stackrel{(*)}{=} A \cdot (B \cdot B') \cdot A' = A \cdot I_n \cdot A' = A \cdot A' = I_n$$

Damit ist gezeigt: $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow A \cdot B \in GL(n, \mathbb{R})$.

(2) In $GL(n, \mathbb{R})$ gilt das Assoziativgesetz, denn die Multiplikation von Matrizen ist sogar im $\mathbb{R}^{n \times n}$ assoziativ.

(3) Die n -reihige Einheitsmatrix I_n ist neutrales Element in $GL(n, \mathbb{R})$.

(4) Zu jedem Element $A \in GL(n, \mathbb{R})$ existiert nach Definition von $GL(n, \mathbb{R})$ ein Inverses $A' \in GL(n, \mathbb{R})$.

Insgesamt: $GL(n, \mathbb{R})$ ist mit der Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung eine Gruppe.

(II)

Betrachte $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A \text{ ist orthogonal}\}$. Gemäß Vorlesung, Satz 45.3 a und Bemerkung gilt:

$$A \in O(n) \Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar und } A^{-1} = A^T$$

$$\Rightarrow O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^{-1} = A^T\}$$

Zeige: $O(n)$ ist Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$.

Beweis:

1. Seien $A, B \in O(n)$; zu zeigen: $A \cdot B \in O(n)$.

$$A, B \in O(n) \Rightarrow A, B \in GL(n, \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A \cdot B \in GL(n, \mathbb{R}), \text{ da } GL(n, \mathbb{R}) \text{ Gruppe}$$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} \text{ existiert nach Definition von } GL(n, \mathbb{R})$$

$$\text{Es gilt: } (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T \Rightarrow A \cdot B \in O(n)$$

2. Sei $A \in O(n)$; zu zeigen: $A^{-1} \in O(n)$.

$$A \in O(n) \Rightarrow A \in GL(n, \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ existiert, da } GL(n, \mathbb{R}) \text{ Gruppe ist}$$

$$\text{Es gilt: } (A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T = (A^{-1})^T \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$$

Damit ist gezeigt, dass $O(n)$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist; somit hat $O(n)$ Gruppenstruktur.

Ergebnis:

Die Menge $O(n)$ der orthogonalen Matrizen ist mit der Matrixmultiplikation als Operation eine Gruppe.

(III)

Betrachte $SO(n) := \{A \in O(n) | \det(A) = 1\}$.

Zeige: $SO(n)$ ist Untergruppe von $O(n)$ (und somit auch Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$).

Beweis:

1. Seien $A, B \in SO(n)$; zu zeigen: $A \cdot B \in SO(n)$

$$A, B \in SO(n) \Rightarrow A, B \in O(n)$$

$$A \cdot B \in O(n), \text{ da } O(n) \text{ Gruppe}$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{da } A, B \in SO(n)} = 1$$

$$\text{Wegen } \det(A \cdot B) = 1 \Rightarrow A \cdot B \in SO(n)$$

2. Sei $A \in SO(n)$; zu zeigen: $A^{-1} \in SO(n)$

$$A \in SO(n) \Rightarrow A \in O(n)$$

$$\Rightarrow A^{-1} \text{ existiert und } A^{-1} \in O(n), \text{ da } O(n) \text{ Gruppe}$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \underbrace{1^{-1}}_{\text{da } A \in SO(n)} = 1$$

$$\text{Wegen } \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow A^{-1} \in SO(n)$$

Damit ist gezeigt, dass $SO(n)$ eine Untergruppe von $O(n)$ und wegen (II) eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist; somit hat $SO(n)$ Gruppenstruktur.

Ergebnis:

Die Menge $SO(n)$ der orthogonalen Matrizen mit Determinante = 1 ist mit der Matrixmultiplikation als Operation eine Gruppe. $\square$